SAÜ

7. BÖLÜM

ASİMETRİ (ÇARPIKLIK) VE BASIKLIK ÖLÇÜLERİ

PROF. DR. MUSTAFA AKAL

İÇİNDEKİLER

1. **ÇARPIKLIK VE BASIKLIK**
2. **ORTALAMALAR YARDIMIYLA ÇARPIKLIĞIN (ASİMETRİ, SKEWNESS) HESAPLANMASI**
   - **2.1. Merkezi Eğilim Ölçüleri Yardımıyla Serilerin Çarpıklığının Hesaplanması**
3. **MOMENTLER YARDIMIYLA ÇARPIKLIĞIN (ASİMETRİ, SKEWNESS) VE BASIKLIĞININ (KURTOSİS) HESAPLANMASI**
   - **3.1. Basit Serilerde Momentler**
   - **3.2. Tasnif Edilmiş Serilerde Momentler**
   - **3.3. Gruplanmış Serilerde Momentler**
   - **3.4. Momentler Yardımıyla Çarpıklık (Asimetri, Skewness) Katsayısının Hesaplanması**
   - **3.5. Momentler Yardımıyla Basıklık (Kurtosis) Katsayısının Hesaplanması**
4. **ORTALAMALAR, ÇARPIKLIK KATSAYISI VE BASIKLIK KATSAYISI YARDIMIYLA BİR SERİNİN ANALİZİ**

HEDEFLER

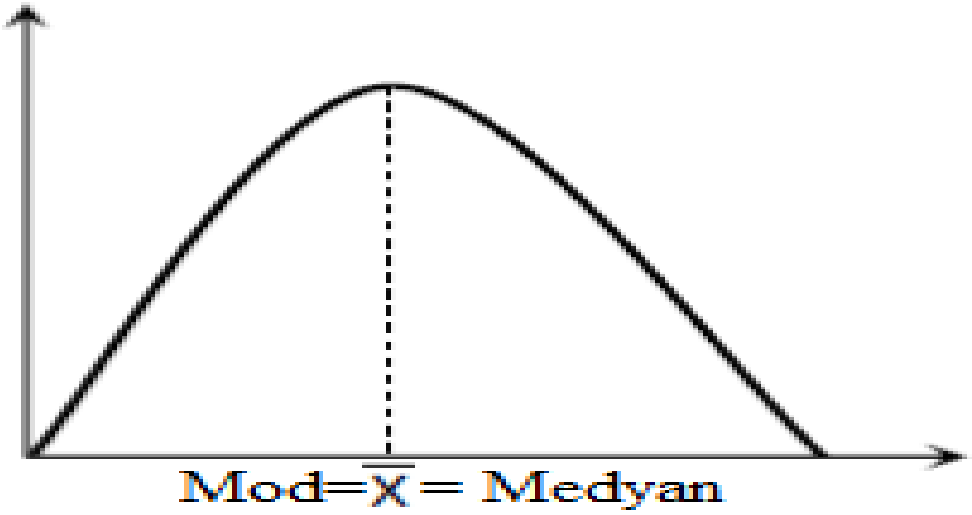
Çarpıklık ve basıklık tanımlarının tanıtılması ve çarpıklık hesaplamalarının gösterilmesi.

1. ÇARPIKLIK VE BASIKLIK

Serilerin dağılımı hakkında ortalamalar ve değişim ölçüleri yardımıyla belli ölçüde bilgi edinebiliriz. Bu iki ölçünün yanında, serilerin simetriden ne kadar uzaklaştığını gösteren **"Çarpıklık Katsayısı"** ve serinin yüksekliğinin normal serinin yüksekliğinden ne kadar uzaklaştığını gösteren **"Basıklık Katsayısı"** hesaplanabilir.

1.1. Ortalamalar Yardımıyla Çarpıklığın (asimetri, skewness) Hesaplanması

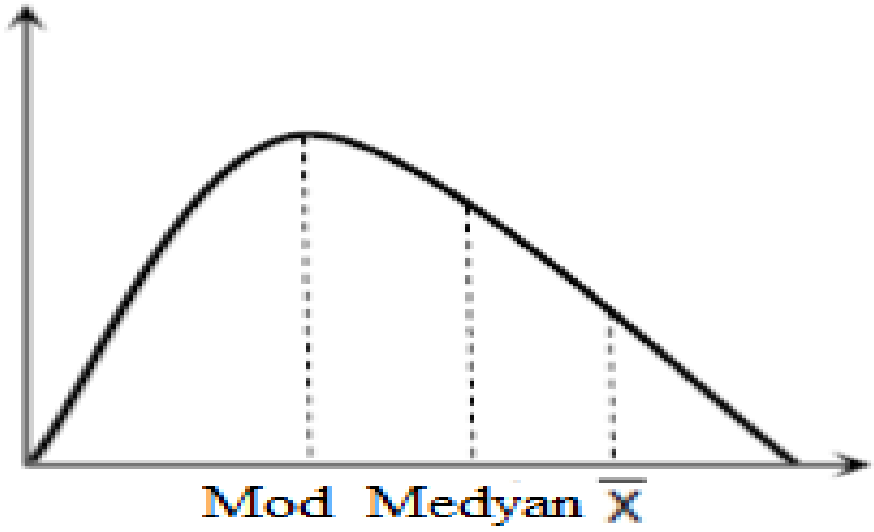
Araştırmacılar, çalışmalarında genellikle ortalamalar ve değişim ölçülerini hesaplayarak seri hakkında ulaşabilecekleri maksimum bilgiye ulaştıklarını ve diğer ölçülerin hesaplanmasının fazla bir bilgi sağlamayacağını savunmaktadırlar. Çoğu zaman bunda haklılık payı olsa da, serinin dağılımının şekli hakkında bilgiler edinmenin araştırmacıya ilave bilgiler sağlayacağında göz ardı edilmemesi gerekir. Serilerin frekans dağılımlarını gösteren aşağıdaki üç şekil incelendiğinde bu daha iyi anlaşılacaktır.



Serinin frekans dağılımını gösteren yukarıdaki şekilden verilerin merkezi eğilim ölçüleri etrafında **simetrik** dağıldığını söyleyebiliriz. Bu serinin mod, medyan ve aritmetik ortalaması birbirine eşittir. Aşırı büyük ve küçük değerlerin frekansları eşit ya da birbirine çok yakındır.

Simetrik serilerde ⟶ Mod = Medyan = $\overline{x}$

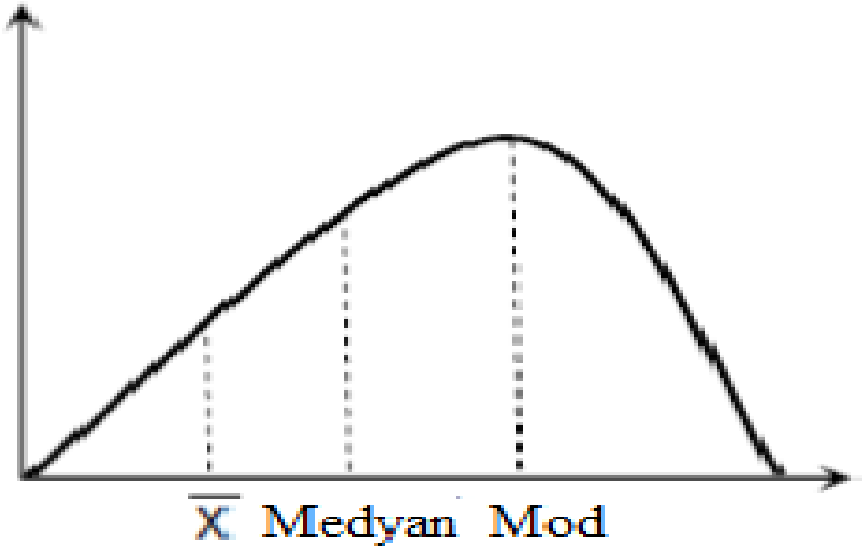
Öğrencilerin istatistik dersinden aldıkları notlar ortalama etrafında simetrik olarak dağılıyorsa yukardaki durum söz konusu olacaktır.



Serinin frekans dağılımını gösteren yukarıdaki şekil sağa doğru uzun kuyrukludur. **Sağa çarpık** frekans dağılımına sahip olan bu seride merkezi eğilim ölçüleri arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir.

Sağa çarpık serilerde ⟶ **Mod < Medyan < $\overline{x}$**

Aşırı küçük değerlerin frekansı büyük değerlerin frekansından daha fazladır. Bundan dolayı aritmetik ortalama medyandan ve medyanda moddan **daha büyüktür.** ***Öğrencilerin istatistik dersinden aldıkları notların çoğunluğu aritmetik ortalamadan küçükse yukarıdaki şekilde olduğu gibi sağa çarpık frekans dağılımı söz konusu olacaktır.*** Yüksek değerli gözlemler geniş bir aralıkta yer alırken düşük değerli gözlemler nispeten bir arada toplanmıştır.



Serinin frekans dağılımını gösteren yukarıdaki şekil sola doğru uzun kuyrukludur. **Sola çarpık** frekans dağılımına sahip olan bu seride merkezi eğilim ölçüleri arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir.

Sola çarpık serilerde ⟶ **Mod > Medyan > $\bar{X}$**

Aşırı büyük değerlerin frekansı küçük değerlerin frekansından daha fazladır. Bundan dolayı aritmetik ortalama medyandan ve medyan da moddan **daha küçüktür.** ***Öğrencilerin istatistik dersinden aldıkları notların çoğunluğu aritmetik ortalamadan büyükse yukarıdaki şekilde olduğu gibi sola çarpık frekans dağılımı söz konusu olacaktır.*** Düşük değerli gözlemler geniş bir aralıkta yer alırken yüksek değerli gözlemler nispeten bir arada toplanmıştır.

Görüldüğü gibi gözlemlerin frekans dağılımları farklılık gösterebilir ve serilerin çarpıklığının ölçülmesi önemli bilgiler içermektedir. Merkezi eğilim ve değişim ölçüleri serilerin çarpıklığı hakkında bilgi içermezler ve bunların değişik yöntemlerle hesaplanması gerekir. *Serilerin asimetrisi (çarpıklığı) merkezi eğilim ölçüleri, kartiller ya da momentler yardımıyla hesaplanırken serilerin basıklığı momentler yardımıyla hesaplanabilir.*

Herhangi bir seride bu 3 ilişkiden 1 tanesi vardır. Serinin sağa veya sola yakınlığı (artıkça) asimetrik ortalama ile mod arasındaki fark belirli şekilde büyür.

1.2. Merkezi Eğilim Ölçüleri Yardımıyla Serilerin Çarpıklığının Hesaplanması

Serilerin mod ya da medyanının aritmetik ortalamadan farkının o serinin standart sapmasına bölünmesi ile serinin asimetrisi yani çarpıklığı hesaplanabilir. Bulucusunun adından dolayı **Pearson Asimetri Ölçüsü** denilen bu çarpıklık katsayıları (ÇK) aşağıdaki formüller yardımıyla hesaplanır.

$$ÇK = \frac{\bar{X} - Mod}{\sigma} \quad \text{veya} \quad ÇK = \frac{3(\bar{X} - Medyan)}{\sigma}$$

Çarpıklık katsayısı -1 ve +1 sınırları arasında olacaktır. Çarpıklık katsayısı +1'e yaklaştıkça serinin sağa çarpıklığı ve -1'e yaklaştıkça serinin sola çarpıklığı artacaktır. Çarpıklık katsayısı sıfıra yaklaştıkça serinin simetrisi (çarpıklığı) artacaktır (azalacaktır).

ÇK = 0 ⟶ **Seri simetriktir**

ÇK > 0 ⟶ **Seri sağa çarpıktır**

ÇK < 0 ⟶ **Seri sola çarpıktır**

ÖRNEK: Bir mahallede yaşayan aileler çocuk sayılarına göre tasnif edilmiş seri olarak aşağıda verilmiştir. Bu dağılımın çarpıklık katsayısını hesaplayınız ve yorumlayınız?

Çocuk Sayısı (X_i)	Aile Sayısı f_i	f_iX_i	$(X_i - \mu)$	$(X_i - \mu)^2$	$f_i(X_i - \mu)^2$
0	1	0	-2.3	5.3	**5.3**
1	3	3	-1.3	1.7	**5.1**
2	8	16	-0.3	0.1	**0.8**
3	5	15	0.7	0.5	**2.5**

4	3	12	1.7	2.9	**8.7**
Toplam	$\sum_{i=1}^{n} f_i = 20$	$\sum_{i=1}^{n} f_i X_i = 46$			**22.4**

İlk aşamada serinin aritmetik ortalama, mod, medyan ve standart sapmasını hesaplamalıyız. Serinin aritmetik ortalama, mod, medyan ve standart sapması aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{k} N_i X_i}{\sum_{i=1}^{k} N_i} = \frac{46}{20} = 2.3, \text{ Mod = 2, Medyan = 2,}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} N_i \left(X_i - \mu\right)^2}{\sum_{i=1}^{k} N_i}} = \sqrt{\frac{22.4}{20}} = 1.06.$$

Bu seride aritmetik ortalama medyan ve moddan büyük olduğu için sağa çarpıktır. Çarpıklık derecesi ya da katsayısı bulunan değerlerin formülde yerine konulmasıyla aşağıdaki gibi bulunur.

$$ÇK = \frac{\mu - Mod}{\sigma} = \frac{2.3 - 2}{1.06} = 0.28$$

Serinin asimetrisi yani çarpıklığı pozitiftir (sağa çarpık) ve katsayısı 0.28'dir. 0< ÇK < 0.5 olduğundan asimetrisi hafif sağa çarpık seri olarak yorumlanır.

Asimetrisi hafif ya da simetriğe yakın dağılıma sahip serilerde yaklaşık olarak

$Mo \cong 3Me - 2\bar{X}$ **ilişkisi görülür.**

Her iki taraftan - $\bar{X}$ çıkartılıp, Her iki taraf (-1) ile çarpılırsa, serinin asimetrisi hafif ise 3 ortalama arasında şu ilişki vardır:

$$\boxed{\bar{X} - Mo \cong 3\left(\bar{X} - Me\right)}$$

Her iki taraf serinin standart sapması ile bölünürse Perason asimetri ölçüsüne ulaşılır.

$$ASp_I = \frac{\bar{X} - Mo}{\sigma} \quad \text{veya} \quad ASp_{II} = 3\frac{\left(\bar{X} - Me\right)}{\sigma}$$

Pearson asimetri ölçüsü teorik olarak ± 3 sınırları arasında bulunması gereken bu ölçü çoğu zaman ± 1 sınırları arasında gerçekleşir **($-1 \leq AS_p \leq 1$).**

Hesaplanan asimetri ölçüsü ± 1'e yaklaştıkça asimetri derecesi yükselir.

a) simetrik serilerde $As_p=0$

b) sağa eğik serilerde $As_p>0$

c) sola eğik serilerde $As_p<0$

$As_p=0$ sonucu rastlantısal ise serinin simetrik olduğu kesin değildir. Kesinlik kazandırmak için alternatif asimetri ölçülerine bakılır.

ÖRNEK: Bir serinin $\bar{X}$ =19, M_e=19.5, M_o=20, σ =2 olsun.

$AS_{p1}=\frac{19-20}{2}=0.50; AS_{p2}=\frac{3.(19-19.5)}{2}=-0.75<0$ olduğundan kuvvetli sola eğik seridir.

ÖRNEK: A ve B sınıflanmış serileri için aşağıdaki değerler verilsin.

$\bar{X}_A=3.625 \quad \sigma_A=1.74 \quad M_0^A=3.14 \quad M_e^A=3.43$

$\bar{X}_B=5 \quad \sigma_B=1.78 \quad M_0^B=5.4 \quad M_e^B=5.25$

Buna göre A ve B serilerinin asimetri durumlarını kıyaslayınız.

$$AS_p^{AI}=\frac{\bar{X}-M_0}{\sigma_A}=\frac{3.625-3.14}{1.74}=0.2787>0 \text{ sağa eğik seri}$$

$$AS_p^{AII}=\frac{3\left(\bar{X}-M_e\right)}{\sigma_A}=\frac{3(3.625-3.14)}{1.74}=0.336>0$$

$$AS_p^{BI}=\frac{\bar{X}-M_0}{\sigma_A}=\frac{5-5.4}{1.78}=-0.2247<0 \text{ Sola eğik}$$

$$AS_p^{BII}=\frac{3\left(\bar{X}-M_e\right)}{\sigma_A}=\frac{3(5-5.4)}{1.78}=-0.421<0 \text{ sola eğik}$$

Her iki serinin asimetrisi hafif çünkü $\boxed{\begin{array}{l}0\le AS_p^A\le 0.5\\ -0.5\le AS_p^B\le 0\end{array}}$ dir.

AS_{PI} ve AS_{PII} çelişkili ise asimetrinin yönünü belirlemede AS_{PI} ölçümü dikkate alınır. Buna göre A serisinin asimetrisi B serisinden fazladır. Çünkü mutlak değerce AS_p^{AI} =0.2789 > AS_p^{BI} =0.2247 dir.

1.3. Kartillere Dayanan Asimetri Ölçüsü

Kartiller arasında 3 türlü ilişki mevcuttur.

a) $Q_3-Q_2\rangle Q_2-Q_1$ sağa eğik seri

b) $Q_3-Q_2=Q_2-Q_1$ simetrik seri

c) $Q_3-Q_2\langle Q_2-Q_1$ sola eğik seri

Serinin simetrisi bozuldukça, yani sağa veya sola eğiklik arttıkça söz konusu 2 fark; $(Q_3-Q_2)-(Q_2-Q_1)$ farkı sıfırdan uzaklaştıkça sola veya sağa eğiklik artar, değişkenlik artar.

Farkının pozitif olması serinin sağa eğik, negatif olması sola eğik olduğunu gösterir.

ÖRNEK: Q_1=2.29, Q_2=3.43, Q_3=5 olarak verilsin.

Q_3-Q_2= 5-3.43=1.57 > Q_2-Q_1= 3.43-2.29=1.14

1.57 >1.14 asimetrisi sağa eğik seridir.

Bowley Asimetri Ölçüsü: kartiller arası farkların, kartiller arası fark toplamlarına oranına dayanır.

$$\boxed{AS_B=\frac{(Q_3-Q_2)-(Q_2-Q_1)}{(Q_3-Q_2)+(Q_2-Q_1)}}$$

Pearson asimetri ölçüsünde olduğu gibi simetrik serilerde AS_B= 0, sağa eğik serilerde AS_B>0 ve sola eğik serilerde AS_B<0'dır. Bowley asimetri ölçüsü $\boxed{-1\le AS_B\le +1}$ sınırlıdır.

ÖRNEK: Q_1=2.29, Q_2=3.43, Q_3=5 olarak verilsin. Bowley Asimetri ölçüsünü bulunuz?

$$\boxed{AS_B=\frac{(Q_3-Q_2)-(Q_2-Q_1)}{(Q_3-Q_2)+(Q_2-Q_1)}}=\frac{(5\text{-}3.43)-(3.43\text{-}2.29)}{1.57\ +1.14}=\frac{0.43}{2.71}=0.16$$

0≤0.16≤0.5 aralığında olduğundan asimetrisi hafif sağa eğik seridir.

ÖRNEK: Bir serinin Q_1=1.5, Q_2=3.5, Q_3= 6.5 olsun.

$$\boxed{AS_B=\frac{(Q_3-Q_2)-(Q_2-Q_1)}{(Q_3-Q_2)+(Q_2-Q_1)}}\quad\boxed{AS_B=\frac{(6.5-3.5)-(3.5-1.5)}{(6.5-3.5)+(3.5-1.5)}}=\frac{3-2}{3+2}=0.2$$

0< AS_p=0.2 <0.5 asimetrisi hafif sağa eğik bir seridir.

ÖRNEK: P&R şirketlerinde çalışan işçilerin haftalık ücret dağılımlarının a) Asp^{I} ve Asp^{II} ölçülerini bulunuz? b**)** Bowley asimetri ölçüsünü bulunuz? c) Sadece aritmetik ortalama ve medyan bilindiğinde 65 işçinin model ücretini bulunuz**?**

Ücretler	f_i	m_i	f_im_i
250-259.99	8	255	2040
260-269.99	10	265	2650

270-279.99	16	275	4400
280-289.99	14	285	3990
290-299.99	10	295	2950
300-309.99	5	305	1525
310-319.99	2	315	630
	$\sum f_i=65$		$\sum f_i m_i=18185$

a. $\bar{X} = \frac{18185}{65} = 279.76$

$$M_o = \ell + s.\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} = \ell + s.\frac{(N_m - N_{m-1})}{(N_m - N_{m-1}) + (N_m - N_{m-1})}$$

$$= 270 + 10\frac{(16-10)}{6+(16-14)} = 277.58$$

$$M_e = \ell + s.\frac{\left(\frac{N}{2} - N_a\right)}{N_m} = 270 + (108)\frac{(32.5-18)}{16} = 279.06$$

$\sigma = \sqrt{280.2^2 - 279.76^2} = 15.76$, gruplanmış seri olduğundan düzeltmiş standart sapma uygulanır;

$$\sigma' = \sqrt{\sigma^2 - \frac{s^2}{12}} = \sqrt{15.76^2 - \frac{10^2}{12}} = 15.5$$

$\bar{X}$ =279.76, Me=279.06, Mo=277.58, σ' =15.5

Ancak burada gruplanmış seri olduğundan doğru asimetri ölçüsü düzeltilmiş (σ') kullanılmasıyla; σ' =15.5 elde edilir.

$$\boxed{ASp' = \frac{279.76 - 277.5}{15.5} = 0.1448} \qquad \boxed{ASp'' = \frac{3(279.76 - 279.06)}{15.5} = 0.1346}$$

Ve $\boxed{0 \le ASp \le 0.5}$ asimetrisi hafif sağa eğik seridir. İşçilerin çoğu ortalama ücretin altında ücret almaktadır.

b) Q_1 =259.995+ $\frac{16.25-8}{10}x10 = 268.25$ $\qquad \frac{1N}{4} = \frac{65}{4} = 16.25$. terim

$Q_2 = 269.995 + \frac{32.5-18}{10}x10 = 279.06$ $\qquad \frac{2N}{4} = 32.5$. terim

Q_3 =289.995 + $\frac{48.75-48}{10}x10 = 290.758$ $\qquad \frac{3N}{4} = 48.75$. terim

Buna göre işçilerin %25'i 268.258 veya daha az kazanır.

%50'si 279.06 veya daha az kazanır.

% 75'i 290.75 veya daha az kazanır.

$Q_3 = 290.75$, $Q_2 = 279.06$, $Q_1 = 268.25$ ise R&P serisinde

$$\boxed{AS_B = \frac{(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)}{(Q_3 - Q_2) + (Q_2 - Q_1)}} = \boxed{\frac{(290.75 - 279.06) - (279.06 - 268.25)}{(290.75 - 279.06) + (279.06 - 268.25)} = 0.039}$$ olup asimetrisi hafif sağa eğik seridir.

. $V_Q^A = \frac{290.75 - 268.25}{290.75 + 268.25} = \frac{22.5}{559} = 0.0402 = \%4$

c) $M_0 \cong \bar{X} - 3\left(\bar{X} - M_e\right)$ Asimetrisi hafif seri özelliğini kullanırız.

$\cong$ 279.76 – 3.(279.76–279.06) $\cong$ 277.66

$Mo \cong 3Me - 2\bar{X}$ =3(279.06)–2(279.76) $\cong$ 277.66

Ve bizim hesaplanan M_o ücretimiz=277.58 olduğu için yakın bir ilişki vardır.

2. MOMENTLER YARDIMIYLA ÇARPIKLIĞIN (ASİMETRİ, SKEWNESS) VE BASIKLIĞININ (KURTOSİS) HESAPLANMASI

Serilerin frekans dağılımları hakkında momentler yardımıyla da bilgi edinilebilir. Momentler, gözlem değerlerinin aritmetik ortalamadan farklarının kuvvetini alarak gözlem sayısına bölünmesi ile elde edilir. Bu şekilde hesaplanan momentlere aritmetik ortalama etrafındaki momentler denir ve en yaygın kullanılanıdırlar. Momentleri hesaplama formülleri serilerin türüne göre değişecektir. Formüllerdeki **r** sembolü momentin derecesini gösterir.

2.1. Basit Serilerde Ortalamadan Sapmaya Göre Momentler

Birinci moment: $\mu_1 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i - \bar{X})}{N} = 0$

İkinci moment: $\mu_2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i - \bar{X})^2}{N} = \sigma^2 = varyans$

Üçüncü moment: $\mu_3 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i - \bar{X})^3}{N}$

Dördüncü moment: $\mu_4 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i - \bar{X})^4}{N}$

r. moment: $\mu_r = \frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i - \mu)^r}{N}$

2.2. Tasnif Edilmiş Serilerde Ortalamadan Sapmaya Göre Momentler

Birinci moment: $$\mu_1 = \frac{\sum_{i=1}^{k} N_i \left(X_i - \mu \right)}{\sum_{i=1}^{k} N_i} = 0.$$

İkinci moment: $$\mu_2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} N_i \left(X_i - \mu \right)^2}{\sum_{i=1}^{k} N_i} = \sigma^2$$

Üçüncü moment: $$\mu_3 = \frac{\sum_{i=1}^{k} N_i \left(X_i - \mu \right)^3}{\sum_{i=1}^{k} N_i}$$

Dördüncü moment: $$\mu_4 = \frac{\sum_{i=1}^{k} N_i \left(X_i - \mu \right)^4}{\sum_{i=1}^{k} N_i}$$

r. moment: $$\mu_r = \frac{\sum_{i=1}^{k} N_i \left(X_i - \mu \right)^r}{\sum_{i=1}^{k} N_i}$$

2.3. Gruplanmış Serilerde Ortalamadan Sapmaya Göre Momentler

Birinci moment: $$\mu_1 = \frac{\sum_{i=1}^{k} N_i \left(m_i - \mu \right)}{\sum_{i=1}^{k} N_i} = 0.$$

İkinci moment: $$\mu_2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} N_i \left(m_i - \mu \right)^2}{\sum_{i=1}^{k} N_i} = \sigma^2, \qquad \boxed{\mu_2^1 = \mu_2 - \frac{S^2}{12}}.$$

Üçüncü moment: $$\mu_3 = \frac{\sum_{i=1}^{k} N_i \left(m_i - \mu \right)^3}{\sum_{i=1}^{k} N_i}$$

Dördüncü moment: $$\mu_4 = \frac{\sum_{i=1}^{k} N_i \left(m_i - \mu \right)^4}{\sum_{i=1}^{k} N_i}, \qquad \boxed{\mu_4^1 = \mu_4 - \frac{S^2}{2}\mu_2 + \frac{7S^4}{240}}$$

r. moment: $$\mu_r = \frac{\sum_{i=1}^{k} N_i (m_i - \mu)^r}{\sum_{i=1}^{k} N_i}$$

2.4. Momentler Yardımıyla Çarpıklık (Asimetri, Skewness) Katsayısının Hesaplanması

Simetrik serilerde aritmetik ortalamadan sapmaların tek dereceli kuvvetlerinin toplamı sıfır olacağından simetrik serilerde birinci ve üçüncü momentler sıfır olacaktır. Buradan **üçüncü momente** bakarak serinin asimetrisi hakkında aşağıdaki sonuçlara ulaşabiliriz.

$\mu_3 = 0 \longrightarrow$ Simetrik seri

$\mu_3 > 0 \longrightarrow$ Sağa çarpık (Asimetrisi pozitif) seri

$\mu_3 < 0 \longrightarrow$ Sola çarpık (Asimetrisi negatif) seri

Bir serinin üçüncü momentine bakarak serinin çarpıklığı konusunda bir fikir sahibi olsak bile çarpıklığın derecesini ölçmek ve farklı birimlerle ölçülen serilerin asimetrisini karşılaştırmak için göreceli bir çarpıklık ölçüsüne ihtiyaç vardır. Serinin hesaplanan üçüncü dereceden momenti yine aynı serinin standart sapmasının üçüncü kuvvetine bölünürse standart bir çarpıklık ölçü birimi elde edilmiş olur. Momentler yardımıyla çarpıklık katsayısı aşağıdaki şekilde formüle edilebilir.

$$\text{ÇK} = \alpha_3 = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{k} N_i (X_i - \mu)^3}{\sum_{i=1}^{k} N_i}}{\sigma^3} = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

$\mu_3 = 0 \longrightarrow$ ÇK = 0, Simetrik seri,

$\mu_3 > 0 \longrightarrow$ ÇK > 0, Sağa çarpık (Asimetrisi pozitif) seri

$\mu_3 < 0 \longrightarrow$ ÇK < 0, Sola çarpık (Asimetrisi negatif) seri

Momentlere Dayalı Asimetri Ölçüsü:-

$$\boxed{\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{\frac{3}{2}}} = \frac{aritmetikortalamayagöre3.derecedenmoment}{aritmetikortalamayagöre2.momentin3/2.kuvveti}}$$

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_3}{\sqrt{\mu_2^3}} = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

Gruplanmış serilerde yine μ_2^1 uygulanır. Yani $\left(\mu_2^1\right)^{\frac{3}{2}}$ konur.

Sağa eğik seri	α_3 **>0**
Sola eğik seri	α_3 **<0**
Simetrik seri	α_3 **=0**
Asimetrisi kuvvetli	α_3 **>0.5**
Asimetrisi zayıf	**-0.5<** α_3 **<0**
Asimetrisi kuvvetli seri	$\lvert\alpha_3\rvert = \lvert -0.75\rvert$ **>0.5**
$\mu_3 = 0$ **Simetrik seri**	α_3 **=0**
$\mu_3 > 0$ **Sağa eğik seri**	α_3 **>0**
$\mu_3 < 0$ **Sola eğik seri**	α_3 **<0**

ÖRNEK: Bir mahallede yaşayan aileler çocuk sayılarına göre tasnif edilmiş seri olarak aşağıda verilmiştir. Bu dağılımın çarpıklık katsayısını momentler yardımıyla hesaplayınız ve yorumlayınız?

Çocuk Sayısı (X_i)	**Aile Sayısı f_i**	f_iX_i	$(X_i-\mu)$	$(X_i-\mu)^2$	$f_i(X_i-\mu)^2$	$(X_i-\mu)^3$	$f_i(X_i-\mu)^3$
0	1	0	-2.3	5.29	5.29	-12.167	**-12.167**
1	3	3	-1.3	1.69	5.07	-2.197	**-6.591**
2	8	16	-0.3	0.09	0.72	-0.027	**-0.216**
3	5	15	0.7	0.49	2.45	0.343	**1.715**
4	3	12	1.7	2.89	8.67	4.913	**14.739**
Toplam	**20**	**46**			**22.2**		**-2.52**

İlk aşamada serinin üçüncü momentini ve standart sapmasını hesaplamalıyız. Serinin üçüncü momenti ve standart sapması yukarıdaki tablo yardımıyla aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i X_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \frac{46}{20} = 2.3,$$

$$\sigma = \sqrt{\mu_2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} N_i\left(X_i - \mu\right)^2}{\sum_{i=1}^{k} N_i}} = \sqrt{\frac{22.2}{20}} = \sqrt{1.11} = 1.05 \Rightarrow \sigma^3 = 1.17.$$

$$\mu_3 = \frac{\sum_{i=1}^{k} N_i \left(X_i - \mu\right)^3}{\sum_{i=1}^{k} N_i} = \frac{-2.52}{20} = -0.126$$

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{-0.126}{1.17} = -0.11$$

Serinin asimetrisi yani çarpıklığı negatiftir (sola çarpık) ve katsayısı - 0.11'dir.

Genel olarak, $|ÇK| > 0.50$ ise kuvvetli çarpık ve -0.5 ≤ ÇK ≤ 0.5 ise zayıf çarpık denilebilir.

2.5. Momentler Yardımıyla Basıklık (Kurtosis) Katsayısının Hesaplanması

İki veya daha fazla serinin aritmetik ortalaması ve standart sapmaları aynı olsa bile frekans dağılımlarının yüksekliği (Basıklık) farklı olabilir. Bu durumlarda serilerin frekans dağılımının basıklığı o seri hakkında bazı ilave bilgiler içermektedir ve hesaplanmasında fayda vardır.

Bir serinin frekans dağılımının basıklığı **dördüncü moment** yardımıyla hesaplanabilir. Serinin hesaplanan dördüncü dereceden momenti yine aynı serinin standart sapmasının dördüncü kuvvetine bölünürse standart bir basıklık ölçü birimi elde edilmiş olur. Momentler yardımıyla basıklık katsayısı (BK) aşağıdaki şekilde formüle edilebilir ve yorumlanabilir.

$$BK = \alpha_4 = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{k} N_i \left(X_i - \mu\right)^4}{\sum_{i=1}^{k} N_i}}{\sigma^4} = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = 3 \Rightarrow$$ Serinin dağılımının yüksekliği standart normal dağılıma uygundur.

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} > 3 \Rightarrow$$ Serinin dağılımının yüksekliği standart normal dağılımın yüksekliğinden daha sivridir.

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} < 3 \Rightarrow$$ Serinin dağılımının yüksekliği standart normal dağılımın yüksekliğinden daha basıktır.

ÖRNEK: Bir mahallede yaşayan aileler çocuk sayılarına göre tasnif edilmiş seri olarak aşağıda verilmiştir. Bu dağılımın çarpıklık katsayısını momentler yardımıyla hesaplayınız ve yorumlayınız?

Çocuk Sayısı	Aile Sayısı

(X_i)	f_i	f_iX_i	$(X_i-\mu)$	$(X_i-\mu)^2$	$f_i(X_i-\mu)^2$	$(X_i-\mu)^4$	$f_i(X_i-\mu)^4$
0	1	0	-2.3	5.29	5.29	27.98	27.98
1	3	3	-1.3	1.69	5.07	2.86	**8.57**
2	8	16	-0.3	0.09	0.72	0.0081	**0.06**
3	5	15	0.7	0.49	2.45	0.24	**1.20**
4	3	12	1.7	2.89	8.67	8.35	**25.06**
Toplam	**20**	**46**			**22.2**		**62.87**

İlk aşamada serinin dördüncü momentini ve standart sapmasını hesaplamalıyız. Serinin dördüncü momenti ve standart sapması yukarıdaki tablo yardımıyla aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i X_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \frac{46}{20} = 2.3,$$

$$\mu_4 = \frac{\sum_{i=1}^{k} N_i (X_i - \mu)^4}{\sum_{i=1}^{k} N_i} = \frac{62.87}{20} = 3.1435$$

$$\sigma = \sqrt{\mu_2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} N_i (X_i - \mu)^2}{\sum_{i=1}^{k} N_i}} = \sqrt{\frac{22.4}{20}} = \sqrt{1.12} = 1.06 \Rightarrow \sigma^4 = 1.26.$$

$$\sigma = \sqrt{\mu_2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} N_i (X_i - \mu)^2}{\sum_{i=1}^{k} N_i}} = \sqrt{\frac{22.2}{20}} = \sqrt{1.11} = 1.05 \Rightarrow \sigma^4 = 1.2321.$$

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{3.1435}{1.2321} = 2.55 < 3.$$

Serinin basıklık katsayısı 2.55'dır. Seri standart normal dağılıma göre daha basıktır.

ÖRNEK: Sınıflanmış bir seriye ilişkin $\mu_2 = 8, \mu_3 = 0,\ \mu_4 = 71.476$ olsun. Buna göre momentlere dayalı asimetri ve basıklık ölçüleri nedir.

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sqrt{\mu_2^3}} = \frac{0}{8^{\frac{3}{2}}} = 0 \text{ seri simetriktir.}$$

$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{71.476}{(8)^2} = 1.117$, α_4<3 olduğu için seri basıktır.

ÖRNEK: Sınıflanmış Seride

X	N	NX	$(X-\bar{X})$	$(X-\bar{X})^2$	$N(X-\bar{X})^2$	$N(X-\bar{X})^3$	$N(X-\bar{X})^4$
32	4	128	-6	36	144	-864	5184
36	20	720	-2	4	80	-160	320
38	24	912	0	0	0	0	0
40	32	1280	2	4	128	256	512
					∑=352	∑=-768	∑=6016

$$\bar{X} = \frac{\sum NX}{\sum N} = \frac{3040}{80} = 38$$

$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sqrt{\mu_2^3}} = \frac{-9.6}{\sqrt{(4.4)^3}} = -1.04$ <0 olduğu için sola eğik ve mutlak değerce 0.5'den büyük olduğu için asimetrisi kuvvetlidir.

μ_4=76.4 $\mu_3 = -9.6$ $\mu_2 = 4.4$

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{76.4}{19.36} = 3.8573$$

α_4>3 olduğu için seri standart normal dağılıma göre daha sivridir.

Momentlere Dayanan Basıklık Ölçüsü, Bir serinin normal olup olmadığı bir serinin simetrik($\alpha_3 = 0$) yanında belirli bir yüksekliğe bağlı olmasını ($\alpha_4 = 3$) belirlemek için kullanır.

$$\boxed{\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{\mu_4}{\sigma^4}}$$

Normal bir seride $\alpha_4 = 3$ sivri bir seride $\alpha_4 > 3$ ve basık bir seride $\alpha_4 < 3$'dir. Her iki ölçüde de aritmetik ortalamaya göre momentler kullanılır. Seri gruplanmış bir seri ise asimetrik ve basıklık ölçüsünü bulmadan önce 2. ve 4. momentlerin düzeltilmiş değerleri buluruz. μ_2 ve μ_4 yerine düzeltilmiş değerler konulur. **Gruplanmış serilerde formüle** μ_2^1 ve μ_4^1 uygulanır.

Gruplanmış bir seriye ilişkin, $\mu_2^1 = 9.2$, $\mu_3 = -3.6$, $\mu_4^1 = 122$ olsun

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sqrt{\left(\mu_2^{\,1}\right)^3}} = \frac{-3.6}{\sqrt{(9.2)^3}} = -0.129 < 0$$ olduğu için sola eğik seridir.

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4^{\,1}}{\left(\mu_2^{\,1}\right)^2} = \frac{122}{(9.2)^2} = 1.44 < 3$$ basık seridir.

ÖRNEK: Gruplanmış bir seriye ilişkin $\mu_2 = 8$, $\mu_3 = 0$, $\mu_4 = 128$, sınıf aralığı=4 olsun. Buna göre momentlere dayalı asimetri ve basıklık ölçüleri nedir. Gruplanmış seri olduğundan önce düzeltilmiş momentler hesaplanır.

$$\mu_2' = \mu_2 - \frac{S^2}{12} = 8 - \frac{4^2}{12} = 6.67$$

$$\alpha_3' = \frac{\mu_3}{\sqrt{\mu_2'^3}} = \frac{0}{6.67^{\frac{3}{2}}} = 0$$ simetriktir.

$$\boxed{\mu_4' = \mu_4 - \frac{S^2}{2}\mu_2 + \frac{7S^4}{240}} = 128 - (8).8 + \frac{7.(256)}{240} = 71.460$$

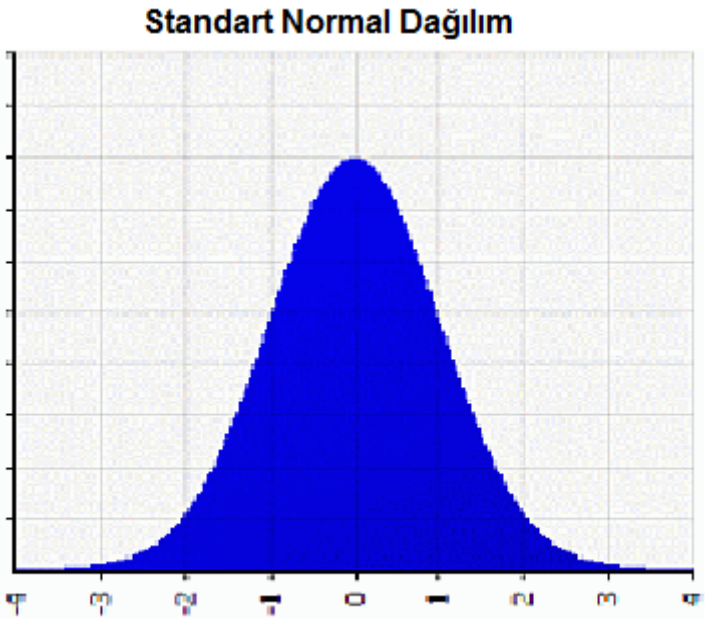
$$\alpha_4' = \frac{\mu_4'}{\mu_2'^2} = \frac{71.46}{(6.67)^2} = 1.606,$$ α_4 <3 olduğu için seri basıktır.

3. ORTALAMALAR, ÇARPIKLIK KATSAYISI VE BASIKLIK KATSAYISI YARDIMIYLA BİR SERİNİN ANALİZİ

Seriler frekans dağılımı çarpıklık katsayısına göre simetrik, sağa çarpık ve sola çarpık olarak üç olasılığa sahipken, basıklık katsayısına göre de normal, basık ve sivri olmak üzere üç olasılık mevcuttur. Bir serinin çarpıklığı (Skewness) ve basıklığı (Kurtosis) aşağıdaki tablo yardımıyla özetlenebilir.

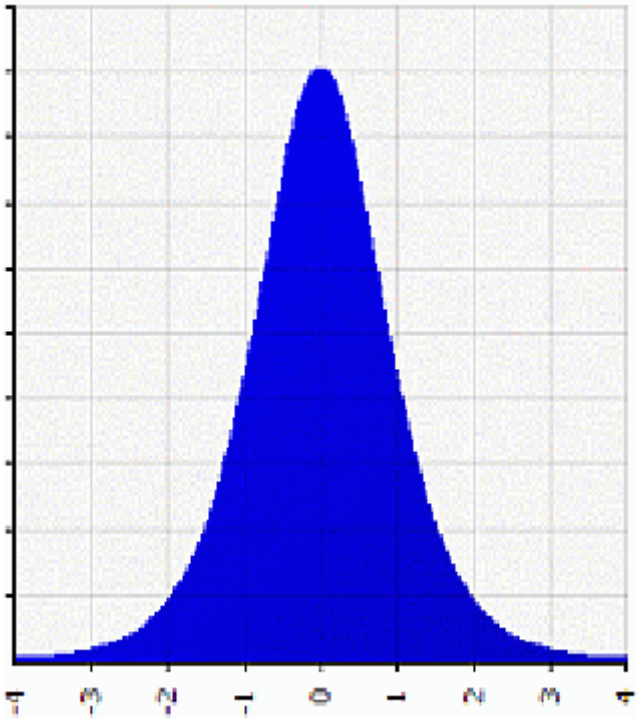
	ÇK = 0	**ÇK > 0**	**ÇK < 0**
BK = 3	Simetrik ve basıklığı normal		
BK > 3		Asimetrisi pozitif ve normale göre sivri	Asimetrisi negatif ve normale göre sivri
BK < 3		Asimetrisi pozitif ve normale göre basık	Asimetrisi negatif ve normale göre basık

Serilerin çarpıklık ve basıklık katsayısının serilerin frekansının dağılımını nasıl belirlediği frekans dağılımının grafiği yardımıyla da görülebilir.



μ = 0, σ = 1, ÇK= 0 ve BK = 3

Yukarıda standart normal bir dağılımın grafiği mevcuttur. Serinin ÇK=0 olması simetrik ve BK = 3 olması basıklığının normal olduğunu göstermektedir.



μ = 0, σ = 0.5, ÇK = 0, BK = 4.2

Yukarıda normal bir dağılımın grafiği mevcuttur. Serinin ÇK=0 olması simetrik ve

BK > 3 olması basıklığının normalden sivri olduğunu göstermektedir. Dikkat edilirse diğer veriler sabitken serinin standart sapmasının azalması BK'nı artıracağından serinin frekans dağılımının sivriliği artacaktır.

5. STANDARTLAŞTIRILMIŞ DEĞİŞKEN

$\boxed{Z_i = \frac{(X_i - \bar{X})}{s}}$ veya $\boxed{Z_i = \frac{(X_i - \mu_x)}{\sigma_x}}$ olup genelde Z puan hesaplarında kullanılır.

ÖRNEK: Bir öğrencinin matematik puanı=84 ve matematik notları serisinin ortalaması $\bar{X}_{mat} = 76$ ve standart sapması $s_m = 10$ dır. Fizik dersi notu 90, sınıf not ortalaması $\bar{X}_{fizik} = 82$, standart sapması $s_f = 32$,dır. Buna göre Z_m,Z_f değerlerini hesaplayınız?

Çözüm:

$$Z_m = \frac{84-76}{10} = 0.8$$

$$Z_f = \frac{90-82}{32} = 0.25$$

$\Rightarrow$ Z_m= 0.8 olduğundan öğrenci matematikte ortalamanın üzerinde "0.8 standart sapma" kadar bir puan almıştır.

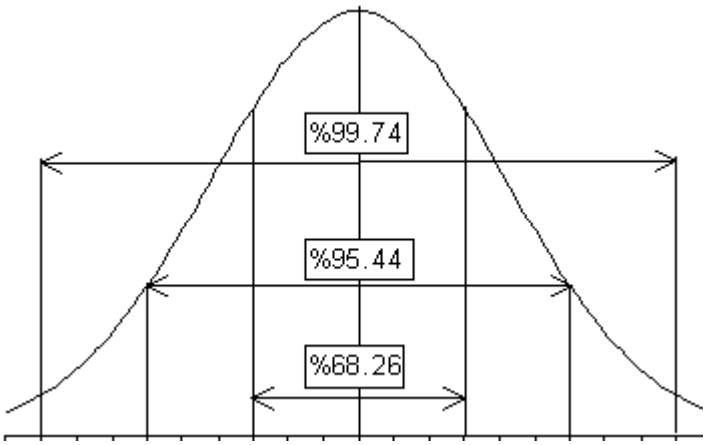
Z_f=0.25 olduğundan öğrenci ortalamanın üzerinde 0.5 standart sapma kadar puan almıştır.

$Z_M = 0.8 > Z_f = 0.25$ olduğundan öğrenci nispi olarak matematikte daha iyi konumdadır.

Oysa sınıf ortalamasına göre öğrenci fizikten daha iyi konumda olduğu kanaati oluşacaktı.

Standart Normal dağılım nedir?

- Varyansı 1, ortalaması sıfır olan,
- Frekans eğrisi çan şeklinde olan simetrik dağılımdır.
- Normal dağılım simetrik olduğu için, normal dağılım gösteren değişkenlerin ortalama, ortanca ve modları eşittir.



Normal Dağılım özelliğinin önemi nedir

- Parametrik testlerin tümünün uygulanabilmesi için gereken varsayımların başında verilerin dağılımının normal olması gelir. *Normal dağılımdan gelmeyen ölçümler kullanıldığında, gerçekte olduğundan daha küçük bir olasılık değeri ya da daha dar bir güven aralığı hesaplanır. Bu durumda, doğru bir hipotezi reddetme olasılığı artar.* Yani, iki grup arasında fark olmadığı halde fark varmış gibi sonuç elde edilebilir

Normal Dağılım Kriterleri

- Dağılımın normal olup olmadığı grafik ve istatistik analiz yöntemleri ile anlaşılır. Histogram, dal ve yaprak grafiği ve normal olasılık grafiği çizilerek dağılımın normal olup olmadığı hakkında fikir edinilebilir.
- Ama bu izlenimin istatistik yöntemlerle de test edilmesi gerekir. Shapiro-Wilks (n<30) ve Lilliefors (n>30) Kolmagorw Simirnov. Yada Shefi testleri bu amaçla sıklıkla kullanılan testlerdir. Bu testlerde p değeri <0.05 ise dağılımın normal olmadığı sonucuna varılır.
- Örneklem büyüklüğü arttıkça, deneklerin dağılımı ve ortalamanın örneklem dağılımı normal dağılıma yaklaşır.
- Genellikle bir örneklemde 30 ya da daha fazla sayıda denek varsa, evren normal dağılım göstermiyorsa bile, ortalamanın örneklem dağılımının normal olduğu varsayılabilir

Verilerin normal dağılmadığı durumlarda iki işlem yapılabilir :

1. Verilere dönüşüm uygulayarak, onların normal dağılıma uymalarını sağlamak.
2. Varolan verilere parametrik olmayan bir test uygulamak

Normal Dağılım sınaması icin hipotezler şöyle ifade edilir:

H_0: Veriler normal dağılım gösterir.

H_1: Veriler normal dağılım göstermez.

Jarque ve Bera sınaması bir Lagranj çarpanı prensipine dayanan bir sınama tipindendir. Sınama istatistiği örneklem basıklık ve çarpıklık ölçülerinin dönüşümlerinden elde edilmiştir. Sıfır hipotezi daha ayrıntılı olarak bir bileşik hipotezdir: beklenen çarpıklığın 0 değerde ve beklenen basıklık fazlalığının 3 değerde olacağı sıfır hipotezdir; çünkü bir normal dağılım için bu değerler gereklidir.

Sınama istatistiği olan JB şöyle elde edilir:

$$JB = \frac{n}{6}\left(S^2 + \frac{(\text{K-3})^2}{4} \right)$$

- Burada *n* gözlem sayısı (veya genellikle serbestlik derecesi); *S* örneklem çarpıklık ölçüsü, *K* örneklem basıklık ölçüsü olur ve bu son iki istatistik şöyle tanımlanır:

$$S = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{\mu_3}{(\sigma^2)^{3/2}} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x-\bar{x})^3}{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x-\bar{x})^2\right)^{3/2}}$$

$$K = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{\mu_4}{(\sigma^2)^2} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x-\bar{x})^4}{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x-\bar{x})^2\right)^2}$$

Burada $\bar{x}$örneklem ortalaması, σ^2 ikinci moment veya varyans ve sırasıyla μ_3 ve μ_4 üçüncü ve dördüncü merkezsel momentlerdir.

JB sınama istatistiği asimptotik olarak **2** serbestlik derecesi bulunan bir ki-kare dağılımına yaklaşır. Örneklem çarpıklığı '0'dan ve basıklığı '3'den sapma gösterdikçe, *JB* sınama istatistiği büyüme gösterir.

Bu sınama çok kere ekonometriciler tarafından çoklu doğrusal regresyon kestirim sonuçları elde edildikten sonra ele geçen hataların normal dağılım gösterip göstermediğini araştırmak için kullanılır. Bazı ekonometriciler bu sınama istatistiğinin bu hallerde, bağımsız değişken sayısı olan *k* ile düzeltilmesini önermişlerdir.

ÖRNEK: $\alpha_3 = -0.129$ ve $\alpha_4 = 1.44$, n=40 verilerine göre serinin normal dağılımını α=0.05 anlamlılık seviyesinde test ediniz.

H_0: Veriler normal dağılım gösterir

H_1: Veriler normal dağılım göstermez.

Sd=2 , anlamlılık seviyesi 0.05 için kritik değeri; $\chi^2_{2,0.05} = 5.99$ dir.

Test istatistiği;

$$\chi^2 = \frac{n}{6}\left(S^2 + \frac{(K-3)^2}{4}\right) = \frac{n}{6}\left(\alpha_3^2 + \frac{(\alpha_4-3)^2}{4}\right) = \frac{40}{6}\left((-0.129)^2 + \frac{(1.44-3)^2}{4}\right) = \frac{40}{6}\left(0.016641 + \frac{(2.4336)}{4}\right)$$

$\chi^2 = \frac{40}{6}(0.625041) = 4.16694 < \chi^2_{2,0.05} = 5.99$ olduğundan H_o hipotezi kabul edilir. Seri normal dağılıma sahiptir; $X \sim N\left(\mu_X, \sigma_X^2\right)$.

6. KONING TEOREMİ

Aritmetik ortalamaya göre momentlerin sıfıra göre momentler cinsinden hesaplanması ile ilgili teoremdir.

μ 'ler ile M'ler arasındaki bağıntı

$$\boxed{\mu_2 = M_2 - M_1^2}$$

$$\boxed{\mu_3 = M_3 - 3M_1M_2 + 2M_1^3}$$

$$\boxed{\mu_4 = M_4 - 4M_1M_3 + 6M_1^2M_2 - 3M_1^4}$$

Aritmetik ortalamadan sapmaya göre hesaplanan çift dereceden moment hesabında gruplaşmış seriler söz konusu olduğunda Shepard düzeltmesi yapılır.

6.1. Basit Serilerde Momentler

X_i	X_i^2	X_i^3	X_i^4
2	4	8	16
3	9	27	81
7	49	343	2401
8	64	512	4096
10	100	1000	10000
$\sum X$=30	**$\sum X^2$ =226**	**$\sum X^3$ =1890**	**$\sum X^4$ =16594**

Sıfıra Göre	**Koning Teoremince Aritmetik Ortalamaya Göre Momentler**
$M_1 = \frac{\sum X}{N} = \frac{30}{5} = 6$	$\mu_1 = \frac{(X - \bar{X})}{N} = 0$
$M_2 = \frac{\sum X^2}{N} = \frac{226}{5} = 45.2$	$\mu_2 = M_2 - M_1^2 = 45.2 - 36 = 9.2$
$M_3 = \frac{\sum X^3}{N} = \frac{1890}{5} = 37.8$	$\mu_3 = M_3 - 3M_1M_2 + 2M_1^3 = 378 - 3.(6x45.2) + 2.6^3 = -3.6$
$M_4 = \frac{\sum X^4}{N} = \frac{16594}{5} = 331$	$\mu_4 = M_4 - 4M_1M_3 + 6M_1^2M_2 - 3M_1^4 = 33188 - 4.(6x37.8) + 6.(6^2 x45.2) - 3.6^4 = 122$

6.2. Sınıflanmış Serilerde Momentler

Sıfıra Göre Momentler

X_i	N_i	X_i^2	X_i^3	X_i^4	$N_i X_i$	$N_i X_i^2$	$N_i X_i^3$	$N_i X_i^4$
2	3	4	8	16	6	12	24	48
3	6	9	27	81	18	54	162	486
4	4	16	64	256	16	64	256	1024
6	7	36	216	1296	42	252	1512	9072
	$\sum N_i=20$				$\sum N_i X_i=82$	$\sum N_i X_i^2=382$	$\sum N_i X_i^3=1954$	$\sum N_i X_i^4=10630$

$$M_1=\frac{\sum X}{N}=\frac{82}{20}=4.1 \qquad M_2=\frac{\sum X^2}{N}=\frac{382}{20}=19.1$$

$$M_3=\frac{\sum X^3}{N}=\frac{1954}{20}=97.7 \qquad M_4=\frac{\sum X^4}{N}=\frac{10630}{20}=531.5\,.$$

Aritmetik Ortalamaya Göre Momentler

X_i	N_i	$(X_i-\bar{X})$	$(X_i-\bar{X})^2$	$(X_i-\bar{X})^3$	$(X_i-\bar{X})^4$
2	3	-2.1	4.41	-9.261	19.4481
3	6	-1.1	1.21	-1.331	1.4641
4	4	-0.1	0.01	-0.001	0.0001
6	7	1.9	3.61	6.859	13.0321

$N_i(X_i-\bar{X})$	$N_i(X_i-\bar{X})^2$	$N_i(X_i-\bar{X})^3$	$N_i(X_i-\bar{X})^4$
-6.3	13.23	-27.783	58.3443
-6.6	7.26	-7.986	8.7846
-0.4	0.04	-0.004	0.0004

13.3	25.27	48.013	91.2247
$\sum N_i\left(X_i-\bar{X}\right)=0$	$\sum N_i\left(X_i-\bar{X}\right)^2=45.8$	$\sum N_i\left(X_i-\bar{X}\right)^3=12.24$	$\sum N_i\left(X_i-\bar{X}\right)^4=158.354$

$$\mu_1=\frac{0}{20}=0 \qquad \mu_2=\frac{45.80}{20}=2.29 \qquad \mu_3=\frac{12.24}{20}=0.612 \qquad \mu_4=\frac{158.354}{20}=7.9177$$

6.3. Gruplanmış Serilerde Momentler

Sıfıra Göre Momentler

Sınıflar	**N**	**m**	**Nm**	**N** m^2	**N** m^3	**N** m^4	$(m-\bar{X})$	$(m-\bar{X})^2$	$(m-\bar{X})^3$	$(m-\bar{X})^4$
0-4'den az	2	2	4	8	16	32	-4	16	-64	256
4-8'den az	4	6	24	144	864	5184	0	0	0	0
8-12'den az	2	10	20	200	2000	20000	4	16	64	256
$\sum$	**8**		**48**	**352**	**2880**	**25216**				

$$M_1=\frac{\sum NM}{\sum N}=\bar{X}=\frac{48}{8}=6 \qquad M_3=\frac{\sum NM^3}{\sum N}=\frac{2880}{8}=360$$

$$M_2=\frac{\sum NM^2}{\sum N}=K^2=\frac{352}{8}=44 \qquad M_4=\frac{\sum NM^4}{\sum N}=\frac{25126}{8}=3152$$

Koning Teoremince Aritmetik Ortalamaya Göre Momentler;

$$\boxed{\mu_2=M_2-M_1^2}=44-36=8, \qquad \mu_2^1=\mu_2-\frac{S^2}{12}=8-\frac{4^2}{12}=6.67$$

$$\boxed{\mu_3=M_3-3M_1M_2+2M_1^3}=0-3.(44).(0)+2.(0^3)=0$$

$$\boxed{\mu_4=M_4-4M_1M_3+6M_1^2M_2-3M_1^4}=3152-(4).(6).(360)+(6).(6^2).(44)-(3).(6^4)=128$$

$$\boxed{\mu_4^1=\mu_4-\frac{S^2}{2}\mu_2+\frac{7S^4}{240}}=128-(8).8+\frac{7.(256)}{240}=71.46$$

Aritmetik Ortalamaya Göre Momentler

$\mathbf{N}(m-\bar{X})$	$\mathbf{N}(m-\bar{X})^2$	$\mathbf{N}(m-\bar{X})^3$	$\mathbf{N}(m-\bar{X})^4$
-8	32	-128	512
0	0	0	0
8	32	128	512
$\sum\mathbf{N}(m-\bar{X})$ **=0**	$\sum\mathbf{N}(m-\bar{X})^2$ **=64**	$\sum\mathbf{N}(m-\bar{X})^3$ **=0**	$\sum\mathbf{N}(m-\bar{X})^4$ **=1024**

$$\mu_1 = \frac{\sum \mathrm{N_i}\left(X_i - \bar{X}\right)}{\sum N_i} = \frac{0}{8} = 0$$

$$\mu_2 = \frac{\sum N_i\left(m_i - \bar{X}\right)^2}{\sum N_i}, \mu_2 = \frac{64}{8} = 8 \text{ ve } \mu_2^1 = \mu_2 - \frac{S^2}{12} = 8 - \frac{4^2}{12} = 6.67 \text{ (DÜZELTİLMİŞ)}$$

$$\mu_3 = \frac{\sum N_i\left(m_i - \bar{X}\right)^3}{\sum N_i}, \mu_3 = \frac{0}{8} = 0$$

$$\mu_4 = \frac{\sum N_i\left(m_i - \bar{X}\right)^4}{\sum N_i} = \frac{1024}{8} = 128, \boxed{\mu_4^1 = \mu_4 - \frac{S^2}{2}\mu_2 + \frac{7S^4}{240}} = 128 - (8).8 + \frac{7.(256)}{240} = 71.460$$

Koning Teoremince, aritmetik ortalamaya göre momentler sıfıra göre momentlerden elde edildikten sonra gruplanmış serilerde çift sayılı momentlerde düzeltme uygulanarak düzeltilmiş momentler elde edilir.

KAYNAKLAR:

1. Yılmaz Özkan, Uygulamalı İstatistik 1, Sakarya Kitapevi, 2008.
2. Özer Serper, Uygulamalı İstatistik 1, Filiz Kitapevi, 1996.
3. Meriç Öztürkcan, İstatistik Ders notları, YTÜ.
4. Andım Oben Balce ve Serdar Demir, İstatistik Ders Notları, Pamukkale Üniversitesi, 2007.
5. Ayşe Canan Yazıcı, Biyoistatistik Ders Notları, Başkent Üniversitesi.
6. Zehra Muluk ve Yavuz Eren Ataman, Biyoistatistik ve Araştırma Teknikleri Ders Notları, Başkent Üniversitesi.