Araştırma Makalesi
Research Article

Zekiye KUTLUSOY

Mantık-Matematik İlişkisi Üzerine*

Özet

Mantık ve matematik, başlangıçlarından beri birbirlerine hep yakın durmuş ve çeşitli şekillerde ilişki içinde olmuşlardır. Tarihsel olarak bakıldığında, genel olarak, aralarındaki ilişkinin özellikle birinde yaşanan bir sorunun diğerinin yardımıyla aşılmaya çalışılması durumunda kendini gösterdiği görülür. Bu yazıda, başlıca üç döneme odaklanılarak mantık-matematik ilişkisinin nasıl ortaya çıktığı aydınlatılmakta; dahası, bu ilişkinin genelde mantığın gelişimine büyük bir katkı sağladığı netleştirilmektedir.

Anahtar Terimler

Mantık, Matematik, İspat, Aksiyomatik/Dedüktif Yöntem, Matematiksel/ Mantıksal Doğruluk, Matematiksel Mantık, Matematiğin Mantıksal Temelleri.

On Relationship Between Logic and Mathematics

Abstract

Since their beginnings logic and mathematics have been very close to each other and there has been relationship between them in various kinds. It is seen historically that their relationships appear especially in cases in which one of them tries to help in solving problems the other has. In this paper, by focusing on basically three such cases, it is illuminated how the relationship between logic and mathematics occurs; what is more, it is clarified that their relationship makes, in general, great contributions to progress of logic.

Keywords

Logic, Mathematics, Proof, Axiomatic/Deductive Method, Mathematical/Logical Truth, Mathematical Logic, Logical Foundations of Mathematics.

---

* Bu yazı, 3-4 Mayıs 2013 tarihlerinde Eskişehir Anadolu Üniversitesi Yunusemre Kampusunda düzenlenen II. Mantık Çalıştayında sunulmuş bildirinin gözden geçirilmiş metnidir.

Giriş

Matematiğin mantıksal temellerine, yani mantık ilkelerinden türetilebilirliğine ilişkin olarak B. Russell (1872-1970) ve A. N. Whitehead'in (1861-1947) birlikte yazdıkları, sembolik mantığın klasiği olarak da değerlendirilen üç ciltlik kitapları *Principia Mathematica*'nın, 1910-1913 yılları arasında yayımının tamamlanmasının yüzüncü yıldönümünde,[1] "mantık-matematik etkileşimi" üzerinde yeniden durmak ve düşünmek yararlı olacak gibi gözüküyor. Bir kere, "sayı, nokta, küme, fonksiyon türünden soyut nesnelere özgü özellikleri ortaya çıkarma, belirleme ve mantıksal olarak kanıtlama (ispatlama) bilimi" olarak tanımlanabilen matematik, olgusal olmayan kavramsal içeriğiyle, dahası yöntem ve sonuçları açısından da empirik bilimlere değil, "soyut kavramsal ilişkiler ile zorunlu çıkarımları konu alan" tanımsal, biçimsel bir disiplin niteliğindeki mantığa yakın durmuştur hep (Yıldırım 1996: 13, 14, 16). Bundan ötürü, birbirleriyle hemencecik ve kolayca ilişkilendirilebilen bu iki disiplinin, tüm bir tarihsel süreç boyunca, özellikle karşılaştıkları güçlüklerle baş etmekte zorlandıkları kimi sıkıntılı dönemlerinde birbirlerinin yardımına koşmuş, birbirlerini desteklemiş olabileceklerini düşünmek hiç zor olmasa gerek. Gerçekten de geçmişlerine bakıldığında, Antik dönem (daha açıkçası -Aristoteles mantığı ve Eukleides geometrisiyle öncelleri[2] göz önüne alınacak olursa- İÖ 4. yüzyıl) başlangıçlı bu iki formel disiplin arasındaki ilişkinin, en başından beri, birinde yaşanan bir zorluğun diğerinin katkısıyla aşılması şeklinde ortaya çıktığı anlaşılmaktadır.

Şimdi, matematiğin, mantıkla olan ilişkisinin açığa çıkarıldığı kuramsal-kavramsal bir çerçevede kurulmuş olması da dikkatte alındığında, *Principia*'da en yetkin biçimine ulaşmış olan "matematiğin mantığa indirgenmesi/mantıkla özdeşleştirilmesi" girişiminin doğru olarak değerlendirilebilmesi için, ikisi arasındaki ilişkinin nasıl oluşturulduğunun çok iyi anlaşılması gerekir. İşte bu yazı, mantık ve matematik arasındaki etkileşimin nasıl gerçekleştiği, bu iki disiplinin hangi koşullar altında birbirini etkilediği ya da etkileyebildiği gibi, mantık ve matematik felsefelerinin kapsamında yer alabilecek tartışmalara odaklanmaktadır. Bu tartışmalar bağlamında ise başta matematiğin doğası, matematiksel doğruluk (matematiksel kesinlik ve zorunluluk), kuramsal matematik-uygulamalı matematik ayrımı ve matematiğin temelleri gibi sorunlarla da hesaplaşıldığı görülmektedir. Bu sorunlar, örneğin matematiğin konusunun ne olduğu, yani matematiksel nesnelerin ne türden nesneler olduğu, bu nesnelerin nasıl, hangi yollarla edinildiği gibi bir sorun çerçevesini -örneğin G. Frege'nin (1848-1925) "gerçekçi", P. J. S. Benacerraf'ın (1931-) "adcı" veya A. Einstein'ın (1879-1955) "yapımcı" bakış açılarından- ele alarak irdeleyen matematik felsefesinin önemli sorunlarındandır.

---

1 Cambridge University Press tarafından birinci cilt 1910, ikinci cilt 1911, üçüncü cilt 1913'te yayımlanmıştır.

2 Antik Yunan'da, matematikteki asıl büyük ve önemli katkıların geometri alanında yapılmış olmasından ötürü, geometri öne çıkmaktadır; bunun en iyi örneği Eukleides'in geliştirmiş olduğu geometri sistemidir.

Matematiğin Mantıksal Karakterinin Netleşmesi Temelinde Kurulması

Mantık ile matematik arasında netleşen ilk ilişki, görüldüğü kadarıyla, matematiğin içine düştüğü çıkmazdan mantıktan yararlanarak çıkması yönündeki ilişkidir. Matematiğin *mantıksallığı*nın açığa çıkarılarak gerçek anlamda kurulduğu bu ilişkisel çerçeve, matematiğin, Antik Yunan'da, pratik yaşam kaygılarına yönelik empirik niteliğini yitirip, kuramsal/kavramsal bir nitelik kazanmasına yol açar. C. Yıldırım'a (1925-2009) göre "[f]elsefede olduğu gibi matematikte de Yunan düşüncesi olgunluk çağına İÖ 4. yüzyılda ulaşır. Thales ile başlayan matematiğin, mantıksallaşma süreci, Pythagorasçılarla Eudoxus'un önemli katkılarını yüklenerek sonunda Eukleides geometrisinde en yetkin örneğiyle günümüze ulaşır." (1996: 25). Gerçekten de söz konusu yüzyılda -İÖ 384-322 yılları arasında yaşamış olan- Aristoteles mantık bilimini kurmuş; Eukleides ise İÖ 300'de İskenderiye'de yazdığı on üç ciltten oluşan kitabı *Elementler*'de geometriyi, mantıksal kesinliğe sahip, matematiksel bir ispat çerçevesi olarak dedüktif çıkarımlı, aksiyomatik bir yapıya oturtmuştur. Böylelikle geometri, başlarda (Babil'de ve Mısır'da) yalnızca olgusal olarak sınanabilen deneysel-gözlemsel-ölçümsel önermelerin alanı iken, artık doğrulukları mantıksal çıkarım yöntemiyle ispatlana(bile)n, (yani aralarında mantıksal ilişkilerin kurulduğu, mantıksal bir düzen içine sokulabilen) matematiksel önermelerin bir dizgesi durumuna gelmiştir. Eukleides, aslında, *Elementler*'de yeni bir teorem ortaya atmamış, yalnızca o güne kadar belirlenerek gelmiş olan teoremlerin, kimi temel önermelerden (tanım, aksiyom ve postulatlardan) dedüktif yollarla çıkarsanmasını (yani ispatlanmasını) -önermeleri sistematize ederek- olanaklı kılmıştır. Böylece dedüktif mantık "(…) geometriye, hiçbir düşünce alanında örneği gösterilemeyen mantıksal bir bütünlük (…)" (Yıldırım 1996: 27), bu bütünlük içinde de doğruluk, kesinlik ve zorunluluk kazandırmıştır.[3] Eukleides'ten sonra Arkhimedes de aksiyomatik yöntemi başarıyla kullanmayı sürdürmüştür.

Şimdi, matematikteki bu gelişme, matematiğin farklı dönemlerinde veya başka düşünsel etkinlik alanlarında da görülebileceği gibi, sancılı bir sürecin ardından yaşanmıştır. Matematik tarihindeki ilk büyük bunalım, Pythagorasçıların bulduğu "$\sqrt{2}$" gibi irrasyonel sayılarla ortaya çıkan negatif ve sanal sayıların neden olduğu bunalım olarak kabul edilir.[4] Özel bir öneme sahip olan bu ilk bunalım, mantığın, daha açık bir söyleyişle dedüktif düşünme veya yaklaşım biçiminin, matematiğin yardımına koşması ile aşılırken, matematiğin kuramsal olarak kurulması gerçekleşmiş, oluşum süreci içindeki "özünde evreni nicel özellikleriyle algılama yeteneğine dayanan" (Yıldırım 1996: 19) matematiksel düşünmenin yöntemi de iyice belirginlik kazanmıştır. "Mantıksal inceleme ispat fikrinin doğduğu yerde başlar." diyen Yıldırım (1999: 95), bu durumu şöyle vurgulamaktadır:

---

3 Yine de bu doğruluk, kesinlik ve zorunluluğun mutlak değil, bağıl (yani ispatta kullanılan öncüllere bağlı), koşulsal/koşullu olduğuna dikkat çekmekte yarar var.

4 Matematikte yaşanan diğer büyük bunalımlar ise, sırasıyla, sonsuz küçüklerin hesabıyla ilgili bunalım, Eukleides'çi olmayan geometrilerin yarattığı bunalım ve kümeler kuramında karşılaşılan paradoksların doğurduğu bunalım olarak verilmektedir (Yıldırım 1996: 75).

> (…) √2 gibi irrasyonel sayıların ortaya çıkmasıyla başlayan bunalımın giderilmesi yolundaki çalışmalar, mantıksal ispat yönteminin belirginlik kazanmasında başlıca etkenlerden biri olmuştur. Nitekim dönemin ünlü bilgini Eudoxus'un, √2'nin rasyonel bir sayı olamayacağına ilişkin verdiği ispattır ki, bunalıma son vermiştir. Ama Pythagorasçıların asıl büyük katkıları, Thales'te ilk örneklerini gördüğümüz dedüktif çıkarsamayı içeren ispat yöntemini ileri bir düzeyde kullanma başarılardır. (…) Eukleides'ten önce Pythagorasçıların geometriyi aksiyomatik olarak kurma yolunda büyük çaba gösterdiklerini öğreniyoruz. Pythagoras teoreminin çeşitli ispatları bu çabanın ürünleridir. (1996: 24)

Bu şekilde geometride (genel anlamda da matematikte) uygulanmaya başlanmış olan aksiyomatik yöntemi, Eukleides'in daha da geliştirip yetkinleştirmesinden önce Aristoteles, tüm mantık görüşlerini içeren *Organon*'un *İkinci Çözümlemeler* kitabında (ki bu kitap, felsefe tarihindeki ilk bilgi kuramı kitabı olarak değerlendirilmektedir), "dolaylı/çıkarımsal bilgi"nin yöntemi olarak ayrıntılı bir biçimde ele almıştır: "(…) 'tanıtlama aracılığıyla bilmek'ten de söz ediyoruz. 'Tanıtlama' dediğim, bilgi veren bir tasım; 'bilgi veren' dediğimse, ona göre bilgiyi edinmemizi sağlayan tasım. İmdi 'bilmek' belirttiğim gibiyse, tanıtlamalı bilginin şöyle öncüllerden çıkması zorunlu: doğru, ilk, doğrudan, sonuçtan daha iyi bilinen, daha önce gelen ve sonucun nedeni olanlar; çünkü böylece ilkeler de tanıtlanana uygun olacak." (2005: Birinci Kitap, II. Bölüm).

Aristoteles'e göre, tanıtlamalı bilgi veren tasımın söz konusu öncülleri konumundaki "ilk önermeler" (yani tanıtlamanın yola çıktığı tümeller) ise tümevarımla öğrenilebilen, tanıtlanamaz bilgiler olmak durumundadır (2005: Birinci Kitap, XVIII. Bölüm). *İkinci Çözümlemeler*'in hemen ilk satırlarında Aristoteles şöyle diyor: "Her anlıksal öğretim ve öğrenim önceden bulunan bilgiden yola çıkar. (…) matematiksel bilimler ve öteki sanatların her biri bu yolla elde edilir. Gerek tasımla gerek tümevarımla yapılan uslamlamalarda da bu böyle; bunların her ikisi de önbilgilerle öğretim yapar: birinciler kabul edilen öncülleri alır; berikiler tekilin açık olmasıyla tümeli gösterir." (2005: Birinci Kitap, I. Bölüm). Matematiksel düşünmenin tümünü (bütün aşamalarını/adımlarını) kuşatan bir metodolojiyle ilgili olarak -matematikte dedüktif düşünmenin yanı sıra, yeni kavram ve genellemelere ulaşmak için indüktif ve retrodüktif düşünmenin önemine ve gerekliliğine inanan- Yıldırım'ın da Aristoteles'inkilere benzer görüşlere sahip olduğu görülmektedir: Ona göre "[i]spat, ispata konu bir ilişki, özellik ya da bunları içeren bir genelleme gerektirir. Öyle bir özellik veya ilişkinin bulunması ise, mantıksal bir çıkarım değil, retrodüktif türden bir düşünme işidir. (…) araştırıcının yaratıcı zekâ, algılama gücü, sezgi, ilgi gibi öznel yetilerine ve konuya ilişkin birikim ve deneyimlerine bağlıdır." (1996: 54).

Öte yandan, matematiğe ilişkin olarak çizilen bu türden bir yöntemsel çerçevenin sergilediği kısmi mantıksallığın tersine, matematiği bütünüyle içeriksiz, formel bir disiplin, matematiksel doğruluğu da olgusal bir içeriğe değil yalnızca forma dayanan, analitik nitelikte, mantıksal doğruluk olarak gören günümüzün kimi matematikçileri için, matematik, kısmi olarak değil, tümüyle mantıksaldır. Örneğin böyle bir matematikçi (aynı zamanda felsefeci ve bilgisayar bilimci, bilgisayar dili BASIC'in geliştiricilerinden biri de olan) J. G. Kemeny'nin (1926-1992), genelde mantıkçı empiristlerin "kuramsal matematiğin bir dalı olan geometri" ile "uzaysal ilişkilerin empirik bilimi olan geometri" arasında yaptıklarına benzer bir ayrım[5] temelinde bunu belirlediği görülmektedir. Kemeny'ye göre "[m]atematik, mantık gibi, salt çıkarım biçimleriyle uğraşan, bilginin en genel bir dalıdır; üstelik bilimin vazgeçilmez dili olan matematik bize yeni hiçbir şey öğretmez. Aksini düşünmek (…) kuramsal matematikle bir tür bilim olan uygulamalı matematiği karıştırmak olur." (Yıldırım 1996: 16).

Bununla ilişkili başka bir ayrımı da gözeterek yapılan bir saptama açısından ise, "matematiksel doğruluk/kesinlik/zorunluluk" alanı olan kuramsal matematik ile "empirik/olgusal doğruluk" alanı olan uygulamalı matematik arasındaki farkın, matematiğin mantığa indirgenmesi çerçevesinde tam olarak açıklığa kavuştuğu düşünülmektedir. Çünkü bu çerçevede "Russell tüm matematiğin, 'P doğru ise Q doğrudur.' biçimini alan önermelerden oluştuğunu söylerken, matematiksel kesinliği önermeler (ya da önerme kalıpları) arasındaki mantıksal ilişkiye (bir önermenin başka bir önermeyi içermesine) bağlıyordu." (Yıldırım 1996: 69). Mantıkla matematik arasındaki etkileşimin belki de en net şekilde aydınlandığı, matematiğin mantıksal temellere dayandırılması girişimi olan bu çerçevede, iki disiplin arasındaki ilişki de matematiğin kurulma aşamasındaki ilişkiye benzer bir ilişkidir. Ancak, 19. yüzyılın ikinci yarısında yüz yüze kaldığı bunalımlardan kurtulmak için matematiğin mantıktan yardım aldığı (ya da mantıkçı yaklaşımın matematiğin yardımına koştuğu) bu ilişki, aşağıda da görüleceği gibi, bu iki disiplinin başlangıç dönemlerindeki etkileşimlerinden daha ileriye taşınan bir ilişkidir.

Modern/Matematiksel Mantığa Geçiş

Sınıf-üye ilişkileri bakımından ya da sınıflar arası kaplamsal ilişkiler açısından irdelenebilen "özne-yüklem-koşaç" biçimindeki önermeler ve tasımsal çıkarımlarla sınırlı Aristoteles kökenli klasik/geleneksel mantık, bağıntıların dile getirildiği önermeleri ve bunlara dayanan çıkarımları inceleme konusu edinmez. Çünkü o, araştırma konuları arasında özelliklerin yanı sıra ilişkilerin de yer aldığı "matematik ve bilimle değil, edebiyat veya hitabetle ilişki içinde" yoluna devam etmiş (Yıldırım 1999: 93), böyle olunca da matematiğin ve bilimin ilerlemelerine ayak uyduramaz bir hale gelmiştir. Bundan ötürü doğan sorunlarıyla mantığın matematiği etkileyip, matematikçileri kışkırtarak yönlendirdiği bu dönemde görüldüğü kadarıyla "(…) mantıktaki modern gelişmeler matematikçilerin mantığa el atmasını beklemiştir." (Yıldırım 1999: 93).

Yetersizliklerinin giderilmesi için (geleneksel) mantıkta girişilen reformun ilk önemli aşaması, 17. yüzyılda G. W. Leibniz'in (1646-1716) evrensel/ideal bir dil (*lingua characteristica*) geliştirme ülküsü doğrultusunda gerçekleşir. Eukleides'in ortaya koymuş olduğu aksiyomatik geometri dizgesinin sonrasında "soyut ispat

[5] C. G. Hempel (1905-1997) ve H. Reichenbach (1891-1953), saf/matematiksel geometri (yorumlanmamış matematik) ve fiziksel geometri (yorumlanmış matematik, yani empirik bilim) arasındaki ayrımı netleştirirken, ikisi arasındaki ilişkiyi de aydınlığa kavuşturmaktadırlar (Hempel, "Geometri ve Empirik Bilimler (1945)", Yıldırım 1996: 191-200; Reichenbach, "Geometrinin Yapı ve Niteliği (1951)", *Bilimsel Felsefenin Doğuşu*, çev. C. Yıldırım, Remzi Kitabevi, İstanbul, 1993, 2. basım, 89-101).

yöntemi"nin diğer alanlara da yaygınlaştırılmaya çalışıldığına değinen Yıldırım, bu bağlamda "hesap(lama)" fikrinin Leibniz tarafından -"evrensel bir bilim kimliği" de kazandırılmak istenen- felsefeye taşınması düşüncesinin gelişimini şöyle aktarmaktadır:

> (…) Descartes'ın geometriye cebirsel yöntemleri uygulamada gösterdiği parlak başarı, mantık için de aynı sonucun alınabileceği umudunu yaratmıştır. (…) Hobbes ve daha başkaları soyut akıl yürütmeye bir tür hesaplama işlemi gözüyle bakılabileceğinden söz etmişlerdi. Bir "akıl yürütme hesabı" (…) kurmanın olanak dışı olmadığını Leibniz (…) kesin bir biçimde dile getirir. Ona göre matematiksel sembolizmi andıran evrensel bir dil (…) kurmak yalnız mümkün değil (…) gereklidir. Böyle bir dil her türlü anlam belirsizliğini veya kavram kargaşalığını önleyecek açıklıkta ve kesinlikte olacaktır. Sayılar üzerinde olduğu kadar kavramlar üzerinde de hesap yapabilmeliyiz. (…) böyle bir sistem kurulunca, (…) felsefede de, bitip tükenmez tartışmalar ve çekişmeler yerini kesin sonuçlara bırakacaktı. (1999: 97-98)

Leibniz, "önermeleri cebir denklemleri gibi ele alma fikri"nin yanı sıra, "özdeşliğin gösterimi için eşitlik işareti"ni de mantığa yerleştirir (Cryan ve diğerleri 2011: 10). Dahası, Aristoteles'in karşıolum karesinin yerine ortaya koyduğu basit yasalar ve olmayana ergi/saçmaya indirgeme (*reductio ad absurdum*) yöntemi ile klasik mantığın her tür tasımının denetlenmesini sağlayacak, "özdeş sembolleri (eşanlamlıları) birbirinin yerine geçirerek önceden belirlenmiş yasalardan sonuçlar türetmeye dayanan ilk gerçek doğruluk teorisi"ni ileri sürer (Cryan ve diğerleri 2011: 11). Ancak yine de Leibniz, ne yazık ki bu son derece önemli ve değerli girişimini tamamlayıp istediği noktaya getiremez.

Mantıktaki reformun ikinci önemli aşamasıysa 19. yüzyılın ortalarına rastlar. J.-G. Rossi'ye göre "19. yüzyılın ortaları, George Boole (1815-1964) ile birlikte bir matematiksel mantığın ortaya çıkışı ve Aristoteles mantığının çok dar olduğuna karar verdikleri çerçevesinin genişletilmesi iradesi yönünde hareket eden W. S. Jevons, J. Venn ve DeMorgan'ın araştırmalarıyla dikkati çeker. Gerçekten de, Aristoteles mantığının Hint-Avrupa dillerinin gramatikal formalarına aşırı bağlı olduğu ve yeni matematiği hesaba katmada yeterince güçlü olmadığı görülüyordu." (2001: 5). İşte böyle bir ortamda, kendi adıyla anılan "Boole cebri"ni bir sınıflar cebri olarak geliştirip mantıkta "Boole dönemi"ni başlatan Boole'un, mantığı matematiksel dilde ifade etmeye girişerek, yani mantığı matematiksel olarak çözümleyerek, "Descartes'ın cebire dayalı geometrisine paralel cebire dayalı bir mantık" ortaya koyduğu *Mantığın Matematiksel Analizi* kitabıyla Leibniz'in yüz elli yıl önceye dayanan düşünü de gerçekleştirme yolunda olduğu anlaşılıyordu (Yıldırım 1999: 99). Bunun sonrasındaysa onun izinden giden kimi mantıkçılar cebirsel mantık sistemleri kurma yolunda çabalarını sürdürürler. O halde, "mantığın matematikleştirildiği" bu reform sürecinin başlatıcısı ve noktalayıcısı olarak sırasıyla Leibniz ve Boole göz önüne alındığında, matematikçilerin ya da matematiğin mantık tarihinde oynadığı rol, tartışmasız bir şekilde belirginlik kazanmaktadır.

Temeller Sorununa Çözüm Önerisi Olarak Matematiğin Mantıksal Temelleri

Matematiğin geçmişine bakıldığında, tarihsel sürecinin kimi güçlükleri, çeşitli bunalımları barındırdığı görülür. Bunlardan 19. yüzyılın ikinci yarısında ortaya çıkan Eukleides'çi olmayan geometrilerin yarattığı bunalım matematiğe yönelik olarak bir tedirginlik ortamı doğurmuş, "(…) ilk kez bu dönemde, birtakım belirsizlik, çelişki ve üstünkörülüklerle yüklü olduğu gözlenen matematiğin, aynı zamanda, temelde bir bütün oluşturduğu bilinci uyanmıştır." (Yıldırım 1996: 80). "Matematiğin doğruluğu zorunlu ya da apaçık aksiyomlara dayandığı görüşünü çökerten" bu yeni geometriler yetmezmiş gibi bir de aynı zaman diliminde "[k]ümeler teorisinden kaynaklanan paradokslar (…) [m]atematiğin tutarlılığına ilişkin genel bir ispatın yokluğuyla (…) matematiğe duyulan geleneksel güveni temelinden sarsar." (Yıldırım 1996: 87). Matematiğin içinde bulunduğu bu olumsuz durumdan kurtarılması amacıyla da özellikle temellerine ilişkin olarak yürütülen sorgulamalar iyice yoğunluk kazanır.

Görüldüğü kadarıyla G. Cantor'un (1845-1918) 1880'lerde geliştirmiş olduğu kümeler kuramı, "sonsuz"un tanımının verilebildiği, üstelik "bütün bir matematiğin temeli sayılan" kuramsal çerçeveyi de oluşturmuşken, "(…) tüm matematiği sarsan beklenmedik bazı mantıksal çelişki ya da paradokslara yol açarak bunların giderilmesi görevini yüklenen mantığın gelişmesini kamçılar. Bu görevinde mantık bir yandan matematiğin temellerini denetleme, öte yandan akıl yürütmede geçerliğin kurallarını yeniden gözden geçirme gibi iki köklü araştırma içine girmekle yeni bir gelişme aşaması başlar." (Yıldırım 1999: 105).[6] Matematik felsefesinin önemli bir soruşturma alanı olarak "matematiği sağlam bir temele oturtma" sorunuyla ilgili ortaya çıkmış başlıca felsefi (ya da temelci) yaklaşımlar, Frege'nin yolunu açtığı "mantıkçılık"tan başka D. Hilbert'in (1862-1943) öncülüğünü yaptığı "biçimcilik" ve L. E. J. Brouwer'ın (1881-1966) önde gelen temsilcileri arasında yer aldığı "sezgicilik"tir.[7]

Matematiğin temellendirilmesi sorunsalı kapsamında G. Peano (1858-1932), Eukleides'in geometri için ortaya koymuş olduğu yetkin, aksiyomatik, dedüktif dizgesel yapıyı, aritmetik için başarmaya girişerek, kullandığı basit bir mantıksal yazım biçimi (notasyon) aracılığıyla sistemini geliştirir. "0"ın, "sayı"nın ve de "ardışıklık/ardıllık"ın (ardışığı/ardılı olma bağıntısının) ilkel terimler olarak alındığı, ayrıca bunlar arasındaki ilişkilere ilişkin "0 bir sayıdır.", "Herhangi bir sayının ardışığı yine bir sayıdır.", "Aynı ardışığa sahip iki sayı yoktur.", "0 hiçbir sayının ardışığı değildir." ve "0'a ait herhangi

---

6 Russell da *Principia*'da, kümeler kuramında ortaya çıkan, Frege için de büyük sorun olmuş paradokslardan kaçınmak için, "karmaşık bir mantıksal düzenek" olan tipler kuramını geliştirir. Ona göre "[f]arklı küme *tipleri*nin aykırılıklarını göstermemiz gerekir. (…) Elemanları nesneler olan kümeler, elemanları kümeler olan kümeler vb. Böylece elemanları kümelerin kümeleri olan kümeler gibisinden ayrımlarla belirsiz biçimde ilerleyebiliriz. Aynı şekilde nesnelerden bahseden yüklemleri ve yüklemlerden bahseden yüklemleri kullanabiliriz." (Cryan ve diğerleri 2011: 69).

7 Öte yandan temelciliğe baştan beri karşı çıkan felsefeciler de vardır; örneğin H. Putnam bu konuda şöyle demektedir: "Kanımca matematik açıklık gerektiren bir konu değildir; temellendirilmesine ilişkin bir bunalımı da yoktur. Dahası, matematiğin temeli olmadığı gibi, bir temele ihtiyacı olduğuna da inanmıyorum." (Putnam'dan akt. Yıldırım 1996: 101).

bir özelliğe, bu özelliğe sahip bütün sayıların ardışıkları da sahip ise, bütün sayılar bu özelliğe sahiptir.” postulatlarının verildiği (Russell 2004: 77-78), sıkı bir ispata olanak tanıyan bu mantıksal sistem, bütün bir doğal sayılar aritmetiğinin çıkarsanabileceği bir aksiyom sistemidir.

Şimdi, aritmetiği mantığa indirgeme ya da mantıkla özdeşleştirme yolunda başı çeken Frege, öncelikle, aritmetiğin terimlerinin tanımlanmasında yararlanılabilecek olan bazı önerme eklemlerine (bağlaçlara) ve niceleyicilere, yani kimi mantıksal değişmezlere ilişkin (mantıksal) terimleri netleştirir. Öte yandan, “ardışıklık”ın zaten mantıksal bir terim olduğu, “0”a da bir sayı olarak açıklık kazandırıldığı bu çerçevede asıl sorun, doğal sayıların doğasının belirlenmesi, daha açıkçası “sayı”nın mantıksal terimlerle tanımlanması olarak somutlaşır ki, Frege bunu “küme” kavramına ve “eşdeğerlik” bağıntısına dayanarak yapar. Buna göre bir sayı, o kadar öğesi bulunan tüm kümelerin (yani öğeleri birebir karşılaşım halinde olduğu için eşdeğer olan kümelerin) kümesi olarak tanımlanır. “Çift elemanlı her küme (…) 2 sayısının somut bir örneğidir; ama 2 sayısı bu türden somut örneklerin tümünü kapsayan kümedir. Sayı ise daha genel bir kavram olup, her biri bir küme oluşturan 0, 1, 2, 3, … gibi tikel sayıların tümünü içine alan kümedir. Buna göre her tikel sayı, sayının bir örneğidir.” (Yıldırım 1996: 89). Frege’ye göre “[k]ümeler akla gelebilecek en temel matematiksel şeylerdir. Bunlar temelde herhangi bir ortak yanlarının olması gerekmeyen elemanlar topluluğudur. Her topluluğun, diğer kümelerdeki eleman sayısıyla karşılaştırılabilecek belirli bir eleman sayısı vardır.” (Cryan ve diğerleri 2011: 20).

Frege’nin sayı kavramıyla ilgili olarak geliştirdiği bu mantıksal analiz temelinde Peano’nun postulatlarını mantık ilkelerinden türetmesiyle de aritmetik mantığa indirgenmiş olur.[8] Bunu izleyen bir ileri adım olarak matematiğin tamamını mantığa indirgemek içinse Russell, matematikle mantığın özdeşliğinin tümüyle gösterildiğini savunduğu *Principia*’da Peano postulatlarından yola çıkarak gerçel sayıları doğal sayılara, doğal sayıları da kümelere indirgemeye girişir (Yıldırım 1996: 90). Aslında burada Russell’ın öncelikle gerçekleştirdiği ve özenle dikkat çekmek istediği işlem, geleneksel saf matematiğin bütünüyle temel aritmetiğe indirgenmesi, yani doğal sayılar kuramından çıkarılabilir olması, başka bir deyişle “matematiğin aritmetik(sel)leştirilmesi”dir (2004: 76-77). Demek ki bu doğrultuda aritmetik, tüm bir matematiğin mantıksal dayanaklarının aydınlatılması sürecine katkıda bulunmuş da olmaktadır.

Burada böylelikle netlik kazanan mantıkçı bakış açısının matematiğin neliğine ya da doğasına ilişkin olarak ortaya koymuş olduğu tezi, Hempel’e göre de şöyle özetlemek olanaklıdır: “Matematik, mantığın bir koludur; mantıktan şu anlamda çıkarsanabilir: a) Matematiğin (yani, aritmetik, cebir ve analizin) tüm kavramlarını, salt mantık terimlerini kullanarak tanımlayabiliriz. b) Matematiğin tüm teoremlerini bu tanımlardan, mantık ilkeleri aracılığıyla (sonsuzluk ve seçiş aksiyomlarını ekleyerek) çıkarsayabiliriz.” (1996: 187-188).

---

[8] Bu konudaki tüm ayrıntılı irdelemeler için Frege’nin 1884’te yayımlanan ünlü kitabına bakılmalıdır: *Aritmetiğin Temelleri-Sayı Kavramı Üzerine Mantıksal-Matematiksel Bir İnceleme*, çev. H. B. Gözkân, YKY/Cogito, İstanbul, 2008.

Matematik ile mantık arasındaki ilişkinin, herhangi bir etkileşim ya da etkile(n)menin ötesinde düpedüz bir özdeşlik ilişkisi olduğunu savunan Russell, *Matematiksel Felsefeye Giriş*'te bu özdeşliği şöyle vurgulamaktadır: "(…) ikisi de son zamanlarda gelişmiştir; mantık daha çok matematikselleşmiş ve matematik daha çok mantıksal hale gelmiştir. Sonuçta, ikisi arasında bir çizgi çekmek tamamen imkansız hale gelmiştir; haddi zatında ikisi bir olmuştur. Genç ve yetişkin kadar birbirinden farklıdırlar; mantık matematiğin gençliği ve matematik mantığın yetişkin halidir." (2004: 91).[9] Yıldırım da bu iki disiplin arasındaki benzerlik noktalarını şu şekilde sıralamaktadır:

> "İki kere iki dört eder," aslında "A, A'dır," demekten öte bize bir şey söylememektedir. "İki kere iki" ile "dört" terimleri (…) eş-anlamlı deyimlerdir. Leibniz'den beri giderek önem kazanan bu görüşe göre matematik temelde mantıkla özdeştir; ikisinde de kesinlik tümüyle tanımsaldır. Mantık gibi matematiği de (…) olgusal içeriği olan bilim sayamayız. (…) Her ikisi de birtakım soyut kavramlarla veya kavramsal nesnelerle uğraşır. Bilimle ilişkileri biçimle-özün ilişkisinden ileri geçmez. İkisi de, verilen önermeleri başka önermelere dönüştürmeye, (…) önermelerden mantıksal sonuçlar türetmeye yarayan dedüktif yönteme dayanmakta, dönüştürme ve çıkarımların geçerlik denetimini sağlayıcı kurallara başvurmaktadır. (1999: 198)

Kısaca, ana aktörler olarak Frege ve Peano ile başlayıp Russell'la doruk noktasına erişen, matematiği mantıksal temeller üzerinde kurma (yani mantıktan türetme) çabası, "mantıkçılık" adıyla anılır. Aslında "matematiğin mantıklaştırılması" olarak nitelendirilen bu süreçte söz konusu yaklaşımı karakterize eden eserler olarak Frege'nin kitabı *Aritmetiğin Temelleri*'ni Russell ve Whitehead'in *Principia*'sı izlemiş, tüm bu gelişmeler sonucunda da mantık, 20. yüzyılın ilk yarısında gerçek biçimsel disiplin kimliğine kavuşmuştur.

Sonuç

Burada tarihsel süreç gözetilerek konu edinilen mantık-matematik ilişkisinin kurulduğu belli başlı dönemlere bakıldığında, ya matematikte ortaya çıkan güçlüklerin mantıkçı bir bakış açısıyla aşılmaya çalışıldığı ya da mantıkta karşılaşılan zorlukların, bu zorlukların harekete geçirdiği matematikçilerce çözülmeye girişildiği görülmektedir. O halde, ikisi arasındaki etkileşimde, genelde çıkmazlara düştüklerinde, sorun yaşanan alanın diğerini etkileyerek tetiklediğini, onun yardımıyla da sorunundan kurtulduğunu (ya da bunun yolunu açtığını) söylemek olanaklı görünmektedir.

Şimdi, yukarıda üç dönem halinde ele alınan mantık-matematik ilişkisinin birinci ve üçüncü dönemlerinden her ikisinin de, mantığın (ya da mantıksal yaklaşım biçiminin) ilgili dönemde matematikte yaşanan sorunun giderilmesine katkı sağladığı

[9] Bu şekilde matematiğin "analitik" karakteri, I. Kant'ın (1724-1804) "sentetik *a priori*" nitelikli, J. S. Mill'in ise (1806-1873) "empirik (deneyimsel)" nitelikteki matematiğinin tersine (ki Mill'e göre matematiğinkiler gibi mantığın önermelerini de "(…) kesin gibi benimsememiz bunlara ilişkin çok büyük sayıdaki ampirik doğrulamanın sonucudur." Cryan ve diğerleri 2011: 123), iyice kes(k)inleştirilmiş olmaktadır.

dönemler olmasına karşın, aralarında ancak kısmi bir benzerlik olduğunun görülmesi gerekir. Çünkü bu dönemler arasında, yalnızca, Eukleides'in geometriyi, Peano'nun da aritmetiği aksiyomatikleştirmesi üzerinden bir paralellik kurulabilir. Yukarıda da belirtildiği üzere, üçüncü dönemde birincisinden farklı olarak hem Frege hem de Russell Peano'nun gerçekleştirdiği dizgesel yapıyı daha ileri noktalara taşımış; sırasıyla, mantık ilkelerine dayandırdıkları bu aksiyomatik sistem aracılığıyla aritmetiği ve de tüm matematiği mantığa indirgemeye girişmişlerdir.

Öte yandan, üç dönemden başlangıç dönemi hariç diğer iki dönemden -mantığın matematiğe etki ettiği- birincisi mantığın matematikselleştirilmesinin, -matematiğin mantık üzerinde etki yarattığı- ikincisi ise matematiğin mantıksallaştırılmasının gerçekleştirildiği dönemlerdir. Dikkat edilirse açıkça görülecektir ki söz konusu her iki dönem de (hem Leibniz'in 17. yüzyılda başlattığı ve Boole'un 19. yüzyılda sürdürdüğü dönem, hem de Frege'nin 19. yüzyılın ikinci yarısında başlattığı, *Principia*'nın da içinde yer aldığı dönem), aslında, modern mantığın geliştirilip yetkinleştirilmesine hizmet eden süreçler olmuşlar ve tümüyle mantığın matematikle olan sıkı ilişkisi sonucunda ortaya çıkmışlardır. Kimi mantık tarihçilerinin, bu iki dönemden ilkinin sonunda Boole'un kitabının (*Mantığın Matematiksel Analizi*'nin) yayımlandığı 1847 yılını modern mantığın başlangıcı olarak görmelerine karşın, bu başlangıç asıl, matematiğin mantığı etkilediği ikinci dönemde Frege'nin kitabı *Kavram Yazıları*'nın yayımlandığı 1879 yılı olarak kabul edilir. Bu durumu daha da netleştiren Rossi'ye göre "(…) 'yeni mantık' olarak adlandırılmaya uygun düşen şeyi geliştirenler özellikle Frege, Peano ve Pierce olmak durumundadır. Frege sembolik bir dil icat eder, niceleme teorisinde görüldüğü gibi tümcelerdeki iki öğeyi, fonksiyon ve argüman olarak birbirinden ayırır. Peano, yeni mantığa aydınlık ve şık bir sembolizm getirir. Peirce ise, o zamana kadar ihmal edilmiş bir bağıntı mantığını meydana çıkartır." (2001: 5). Şimdi, bu dönemlerden her ikisi de göz önüne alındığında, mantığın matematikle olan ilişkisinden oldukça verim alarak kârlı çıktığını söylemek pek de yanlış olmayacak gibi görünüyor.

D. Cryan, S. Shatil ve B. Mayblin 20. yüzyıldaki modern mantığı, hem -önermelerin arasındaki çıkarsama ilişkilerini araştıran- *ispat kuramı*yla hem de kendi aralarında birbirleriyle bağlantıları olan, matematiksel mantık, sembolik mantık ve felsefi mantık olarak üç alt alana ayırırken, toparlayıcı bir şekilde mantık ile matematik arasındaki etkileşim noktalarını da netleştirmektedirler. Onlara göre Russell'ın temsil ettiği matematiksel mantık, "matematiği ve küme teorisini bir araya getirmeye dönük (…) ortak özelliklerini bularak farklı matematik alanlarını birleştirmeyi" hedefleyen bir mantık dalıdır (2011: 35). Frege'nin temsilcisi olduğu sembolik mantık, "sembollerin yönlendirilmesine dönük saf teorik irdelemedir. Bu semboller herhangi bir şeye denk düşmek zorunda değillerdir; etkileşimleri tanımlarla ifade edilen soyut yapılardır" (2011: 35). Bu ikisinden farklı olarak Wittgenstein ile temsil edilen felsefi mantık ise "gerçek kavramlara mantığı uygulamaya çalışır. Saf semboller yerine, olasılık ve inanç gibi gerçek kavramların etkileşimi üzerinde durur." (2011: 35). O halde, Cryan ve diğerlerinin hassas bir ayrımı gözeterek yaptıkları bu sınıflandırmaya göre matematik, yalnızca matematiksel mantık ve sembolik mantık ile ilişkili olmak durumundadır; zaten çoğu zaman da birçok mantıkçı tarafından bu iki alan birbiriyle örtüşür olarak görülüp anılmaktadır.

Şimdi, 1920'lerin sonundan itibaren mantıkçılıkta baş gösteren bir gerilemenin yanı sıra, Russell da, mantıkçılıktan ödün vermek pahasına, -mantıksal olup olmadıkları oldukça tartışmalı- sonsuzluk ve indirgenebilirlik/seçiş aksiyomlarını geliştirmek durumunda kalır. Ama asıl, *Principia*'nın temel tezini, -kimilerince "dünyanın en büyük çağdaş mantıkçısı" olarak anılan- K. Gödel'in (1906-1978), 1931 yılında yayımlanan ünlü teoreminin içerildiği makalesi ("*Principia Mathematica* ve İlişkili Dizgelerin Biçimsel Olarak Kararlaştırılamayan Önermeleri Üzerine") sarsar. İki önemli sonucundan birine ilişkin olarak "eksiklik teoremi" olarak da adlandırılan bu teoreme göre, hiçbir aksiyomatik sistemin eksiksiz olamayacağını (örneğin doğal sayılar aritmetiğini içeren, başka bir deyişle temel aritmetiğin çıkarsanabileceği bir aksiyom sisteminde, doğru olduğu halde onun aksiyomları tarafından ispatlanamayan önermelerin var olduğunu) göstermek için Gödel, üstelik *Principia*'nın aksiyom sistemini örnek olarak kullanır. Burada ilginç olan nokta, kısa bir süre önce, yaşadığı güçlüklerden kurtarmak için matematiği temellendirmek amacıyla girişimde bulunmuş olan mantığın, böylelikle ona ciddi bir darbe vurmuş olduğudur. Cryan ve diğerlerine göre "[m]atematikte kanıtlanamayan doğru tümceler bulunduğu sonucu, matematiğini sağlam bir temele oturtma çabasına ilgi duyan herkes için çok endişe vericidir. Gödel basit ve kesin bir aksiyom dizisinden bütün matematiği türetme yönündeki 19. yüzyıl rüyasına son darbeyi vurdu. Matematiğe temel bulma umuduyla mantıkla uğraşılmamaktadır artık." (2011: 76-77).

Görüldüğü kadarıyla, mantıksal temellere (ilkelere) dayandırılması bir yana, ispat düşüncesi temelinde "mantıksallık" karakteristiğinin netleştirilmesiyle kurulan matematiğin, her önermesinin aksiyomatik yöntemin izlendiği dedüktif-çıkarımsal bir süreçle bilinemeyeceği gibi çarpıcı bir noktaya gelinmiş olmaktadır. O halde, son olarak, mantıkla matematik arasında, burada ele alınan üç dönemdeki olumlu, yapıcı ilişkinin tersine, olumsuz, yıkıcı bir ilişkiden de söz etmek olanaklı görünüyor.

KAYNAKÇA

ARİSTOTELES (2005) *İkinci Çözümlemeler*, çev. A. Houshiary, YKY-Cogito, İstanbul.

CRYAN, D., SHATIL, S. ve MAYBLIN, B. (2011) *Mantık*, çev. N. Elhüseyni, NTV Yayınları, İstanbul (2. basım).

HEMPEL, C. G. (1996) "Matematiksel Doğruluğun Niteliği (1945)", çev. C. Yıldırım, *Matematiksel Düşünme*, Remzi Kitabevi, İstanbul (2. basım), 179-190.

ROSSI, J.-G. (2001) *Analitik Felsefe*, çev. A. Altınörs, Paradigma Yayınları, İstanbul.

RUSSELL, B. (2004) "*Matematiksel Felsefeye Giriş*'ten Seçmeler", çev. M. Özlük, *Matematik Felsefesi*, ed. B. S. Gür, Orient Yayınları, Ankara, 73-103.

YILDIRIM, C. (1996) *Matematiksel Düşünme*, Remzi Kitabevi, İstanbul (2. basım).

YILDIRIM, C. (1999) *Mantık-Doğru Düşünme Yöntemi*, Bilgi Yayınevi, Ankara (3. basım).

YAZAR HAKKINDA

Zekiye KUTLUSOY, Prof. Dr.
Maltepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Felsefe Bölümü, İstanbul.
E-posta: zekiyekutlusoy@maltepe.edu.tr

ABOUT THE AUTHOR

Zekiye KUTLUSOY, Prof. Dr.
Maltepe University, Faculty of Arts and Sciences, Department of Philosophy, İstanbul.
E-mail: zekiyekutlusoy@maltepe.edu.tr